

Gestión Financiera.

6 > Rentas fraccionadas y variables

Juan Carlos Mira Navarro

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

Introducción

En la aplicación práctica del estudio de las rentas, podemos encontrarnos con que los términos de las mismas no necesariamente han de ser uniformes en toda su duración. Del mismo modo, tampoco los términos han de coincidir con los años naturales. Es muy habitual que éstos, en las operaciones financieras de inversión o financiación, sean mensuales, trimestrales, etc.

Igualmente, los términos no necesariamente serán constantes a lo largo de toda la duración de la misma. Es frecuente encontrarse con rentas crecientes en un porcentaje e incluso, con rentas variables en general.

Las *rentas fraccionadas* son aquellas en las que la periodicidad con que se hacen efectivos los sucesivos capitales es inferior al año, produciéndose pagos y cobros mensualmente, trimestralmente, semestralmente, etc.

En una renta fraccionada constante una serie de capitales de la misma cuantía están disponibles en fracciones consecutivas de año, llamadas m , durante n años.

El número de términos total es nm .

Versión imprimible

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

Rentas con fraccionamiento uniforme

En este caso el período de capitalización es superior al período en que se percibe la renta, es decir, nos dan el interés efectivo anual i , mientras que el término C de la renta se percibe m veces dentro del año.

Para encontrar el valor en este tipo de rentas fraccionadas, tendremos también que referir ambos parámetros *término* y *tanto* a la misma unidad.

Rentas con fraccionamiento uniforme

En este caso el período de capitalización es superior al período en que se percibe la renta, es decir, nos dan el interés efectivo anual i , mientras que el término C de la renta se percibe m veces dentro del año.

Para encontrar el valor en este tipo de rentas fraccionadas, tendremos también que referir ambos parámetros *término* y *tanto* a la misma unidad.

Una solución es calcular el interés periódico $i^{(m)}$ a partir del tanto efectivo anual i dado y valorar la renta teniendo en cuenta que la duración de la misma es de nm períodos, siendo $t = nm$.

$$i^{(m)} = (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

Rentas con fraccionamiento uniforme

$$a_{\overline{n}|i^{(m)}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n m}}{i^{(m)}} \quad (1)$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria.

Rentas con fraccionamiento uniforme

$$a_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{i^{(m)}} \quad (1)$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria.

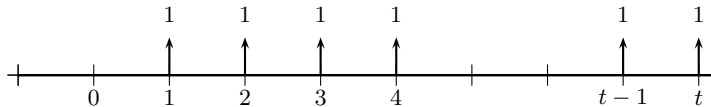
Generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C , duración $n\ m$ períodos a interés $i^{(m)}$, y de acuerdo con (1), será,

$$V_0^{(m)} = C a_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} \quad V_0^{(m)} = C \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{i^{(m)}} \quad (2)$$

■

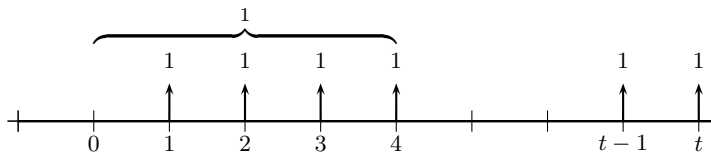
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



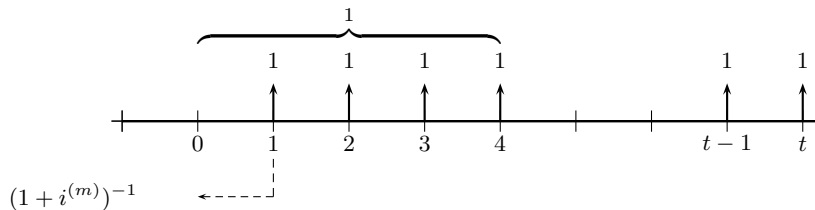
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



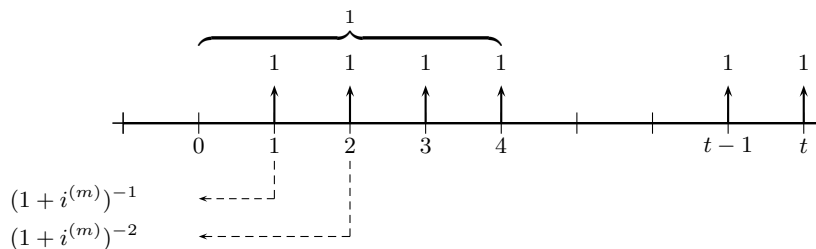
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



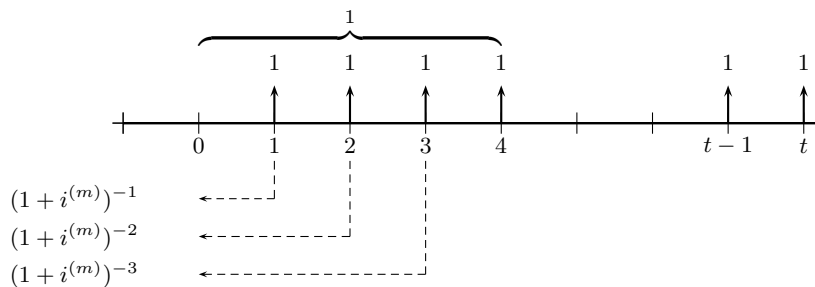
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



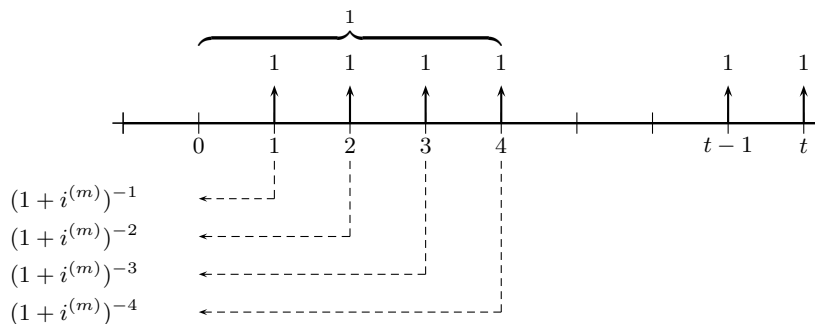
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



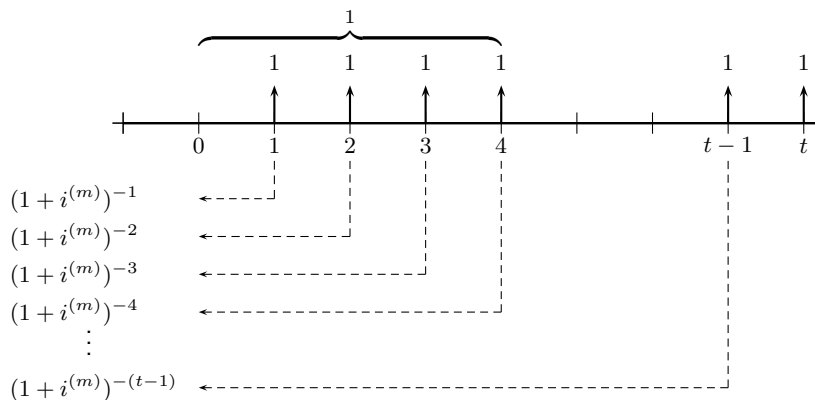
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



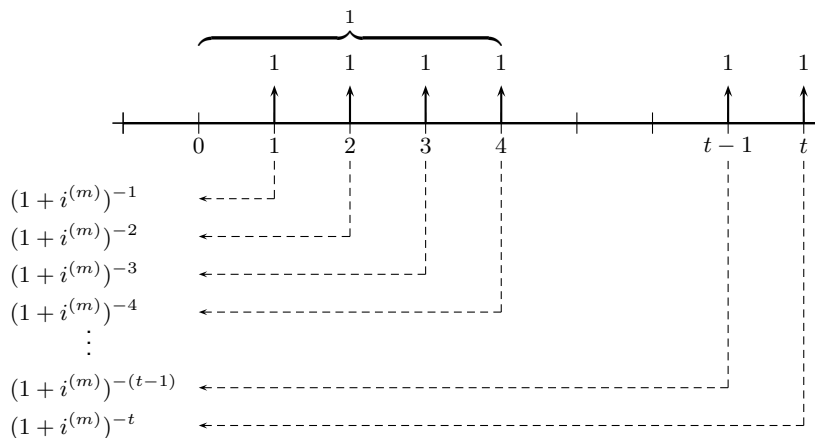
Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,



Rentas con fraccionamiento uniforme

Gráficamente,

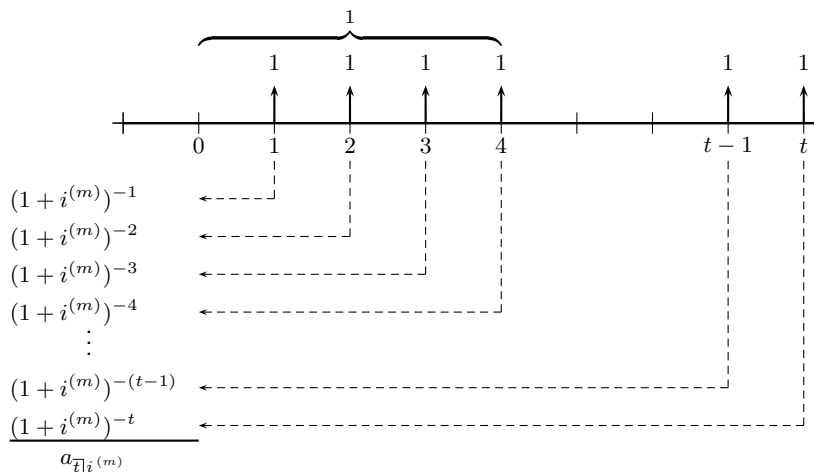


Figura: Valor actual de una renta unitaria fraccionada

Rentas con fraccionamiento uniforme

Este método, lo podemos considerar como genérico para la resolución de las rentas fraccionadas y es el que vamos a utilizar para obtener el valor actual o final de una renta pospagable o prepagable fraccionada, sea de duración determinada o perpetua.

Si se trata del valor final,

$$s_{\overline{n\,m}|i^{(m)}} = \frac{(1 + i^{(m)})^{n\,m} - 1}{i^{(m)}} \quad (3)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme

Este método, lo podemos considerar como genérico para la resolución de las rentas fraccionadas y es el que vamos a utilizar para obtener el valor actual o final de una renta pospagable o prepagable fraccionada, sea de duración determinada o perpetua.

Si se trata del valor final,

$$s_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{(1 + i^{(m)})^{n\ m} - 1}{i^{(m)}} \quad (3)$$

■

generalizando,

$$V_n^{(m)} = C s_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} \qquad V_n^{(m)} = C \frac{(1 + i^{(m)})^{n\ m} - 1}{i^{(m)}} \\ V_n^{(m)} = C a_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} (1 + i^{(m)})^{n\ m} \quad (4)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme

Determinar el valor actual de una renta de 5 años de duración, al 7 % de interés anual efectivo y los términos son de 850 € trimestrales.

Rentas con fraccionamiento uniforme

Determinar el valor actual de una renta de 5 años de duración, al 7 % de interés anual efectivo y los términos son de 850 € trimestrales.

En primer lugar, obtendríamos el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1 + 0,07)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0170585$$

para obtener el valor actual utilizando la expresión (2):

$$V_0 = 850 a_{\overline{20}|0,0170585} = 14\,301,46$$

Rentas con fraccionamiento uniforme

Determinar el valor actual de una renta de 5 años de duración, al 7 % de interés anual efectivo y los términos son de 850 € trimestrales.

En primer lugar, obtendríamos el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1 + 0,07)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,0170585$$

para obtener el valor actual utilizando la expresión (2):

$$V_0 = 850 a_{\overline{20}|0,0170585} = 14\,301,46$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener V_0 ,

850 20 1,70585 0 obteniendo la respuesta de 14 301,46

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata del valor actual en una renta fraccionada cuyos términos sean prepagables, éste será igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada, inmediata y pospagable multiplicado por $(1 + i^{(m)})$. En este caso,

$$\ddot{a}_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{1 - (1 + i^{(m)})^{-1}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{i^{(m)}} (1 + i^{(m)}) \quad (5)$$

y, el valor final,

$$\ddot{s}_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{(1 + i^{(m)})^{n\ m} - 1}{i^{(m)}} (1 + i^{(m)}) \quad (6)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata del valor actual en una renta fraccionada cuyos términos sean prepagables, éste será igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada, inmediata y pospagable multiplicado por $(1 + i^{(m)})$. En este caso,

$$\ddot{a}_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{1 - (1 + i^{(m)})^{-1}} = \frac{1 - (1 + i^{(m)})^{-n\ m}}{i^{(m)}} (1 + i^{(m)}) \quad (5)$$

y, el valor final,

$$\ddot{s}_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = \frac{(1 + i^{(m)})^{n\ m} - 1}{i^{(m)}} (1 + i^{(m)}) \quad (6)$$

■

Se verifica por tanto la relación entre el valor actual y final,

$$s_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} = a_{\overline{n\ m}|i^{(m)}} (1 + i^{(m)})^{n\ m} \quad (7)$$

por ser $(1 + i^{(m)})^n$ el factor de capitalización en el intervalo $[0, m]$.

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por,

$$a_{\infty|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \quad (8)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por,

$$a_{\infty|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \quad (8)$$

■

En el caso de que la renta fraccionada perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será,

$$\ddot{a}_{\infty|i^{(m)}} = 1 + \frac{1}{i^{(m)}} \quad (9)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por,

$$a_{\infty|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \quad (8)$$

■

En el caso de que la renta fraccionada perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será,

$$\ddot{a}_{\infty|i^{(m)}} = 1 + \frac{1}{i^{(m)}} \quad (9)$$

■

¿Qué capital debemos depositar en un banco que nos abona el 0,5 % mensual si pretendemos obtener una renta de 1 000 € mensuales?

Rentas con fraccionamiento uniforme

Si se trata de rentas fraccionadas perpetuas, su valor actual, vendrá expresado por,

$$a_{\infty|i^{(m)}} = \frac{1}{i^{(m)}} \quad (8)$$

■

En el caso de que la renta fraccionada perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será,

$$\ddot{a}_{\infty|i^{(m)}} = 1 + \frac{1}{i^{(m)}} \quad (9)$$

■

¿Qué capital debemos depositar en un banco que nos abona el 0,5 % mensual si pretendemos obtener una renta de 1 000 € mensuales?

$$V_0 = 1\,000 a_{\infty|0,005} = \frac{1\,000}{0,005} = 200\,000$$

Rentas con fraccionamiento uniforme. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas

El valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y diferida p períodos, es igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria y fraccionada actualizado por los períodos de diferimiento, es decir, multiplicando su valor actual por $(1 + i^{(m)})^{-p m}$. Esto es,

$$p/a_{\overline{n m}|i^{(m)}} = (1 + i^{(m)})^{-p m} a_{\overline{n m}|i^{(m)}} \quad (10)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme. Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas

El valor actual de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y diferida p períodos, es igual al valor actual de una renta temporal, constante, unitaria y fraccionada actualizado por los períodos de diferimiento, es decir, multiplicando su valor actual por $(1 + i^{(m)})^{-p m}$. Esto es,

$$p/a_{\overline{n m}|i^{(m)}} = (1 + i^{(m)})^{-p m} a_{\overline{n m}|i^{(m)}} \quad (10)$$

■

Igual ocurre con la obtención del valor final de una renta temporal, constante, unitaria, fraccionada y anticipada h períodos, debiendo multiplicar en este caso el valor de la renta fraccionada por su anticipación $(1 + i^{(m)})^{h m}$.

$$h/s_{\overline{n m}|i^{(m)}} = (1 + i^{(m)})^{h m} s_{\overline{n m}|i^{(m)}} \quad (11)$$

■

Rentas con fraccionamiento uniforme. Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

Esta ecuación general, es el algoritmo desarrollado por Roy E. Martin y William Kahan en el desafío de un sistema de cálculo financiero que equilibrara rapidez y precisión en los recursos computacionales para la HP12c. Nos permite obtener cualquiera de las cinco variables financieras típicas.

$$V_0 + (1 + i\mu) C \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + V_n (1 + i)^{-n} = 0 \quad (12)$$

■

Si $\mu = 0$, se tratará de una renta pospagable, siendo por tanto $(1 + i\mu) = 1$. Si la renta es prepagable, $\mu = 1$ y en consecuencia $(1 + i\mu) = (1 + i)$ que es el factor que convierte una renta pospagable en prepagable.

Rentas con fraccionamiento uniforme. Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

Esta ecuación general, es el algoritmo desarrollado por Roy E. Martin y William Kahan en el desafío de un sistema de cálculo financiero que equilibrara rapidez y precisión en los recursos computacionales para la HP12c. Nos permite obtener cualquiera de las cinco variables financieras típicas.

$$V_0 + (1 + i \mu) C \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right] + V_n (1 + i)^{-n} = 0 \quad (12)$$

■

Si $\mu = 0$, se tratará de una renta pospagable, siendo por tanto $(1 + i \mu) = 1$. Si la renta es prepagable, $\mu = 1$ y en consecuencia $(1 + i \mu) = (1 + i)$ que es el factor que convierte una renta pospagable en prepagable.

Si $C = 0$ nos encontraríamos en un supuesto de capitalización compuesta, pudiendo obtener los valores de $C_0 \vee V_0 \wedge C_n \vee V_n$, ya que,

$$V_0 + V_n (1 + i)^{-n} = 0$$

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

Rentas de términos variables en progresión geométrica

Se caracterizan porque la cuantía de sus términos varían en progresión geométrica. La razón de la progresión, que representamos por q ha de ser positiva, es decir $q > 0$, puesto que en caso contrario todos los términos con exponente de q impar tendrían cuantía negativa.

Si $q > 1$, la renta será creciente. Si $0 < q < 1$, los términos de la renta serán decrecientes.

Dentro de las rentas geométricas cabe hacer todas las hipótesis que para las constantes hemos hecho sobre el vencimiento de los términos (pospagable y prepagable), en relación a la duración (temporal o perpetua) y con respecto al punto de valoración (inmediata, diferida o anticipada).

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor actual de una renta pospagable, inmediata, temporal y variable en progresión geométrica, de primer término C y razón q , con una duración de n años al tipo de interés i , será,

$$V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^2(1+i)^{-3} + \dots + \\ + Cq^{(n-2)}(1+i)^{-(n-1)} + Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}$$

que representa una serie en progresión geométrica de razón $q(1+i)^{-1}$; por tanto, su suma, será,

$$V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \frac{C(1+i)^{-1} - Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}q(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}q} = \\ = C \frac{1 - q^{(n-1)}(1+i)^{-n}q}{\frac{1}{(1+i)^{-1}} - q} = C \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor actual de una renta pospagable, inmediata, temporal y variable en progresión geométrica, de primer término C y razón q , con una duración de n años al tipo de interés i , será,

$$V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = C(1+i)^{-1} + Cq(1+i)^{-2} + Cq^2(1+i)^{-3} + \cdots + \\ + Cq^{(n-2)}(1+i)^{-(n-1)} + Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}$$

que representa una serie en progresión geométrica de razón $q(1+i)^{-1}$; por tanto, su suma, será,

$$\begin{aligned} V_0(C, q)_{\overline{n}|i} &= \frac{C(1+i)^{-1} - Cq^{(n-1)}(1+i)^{-n}q(1+i)^{-1}}{1 - (1+i)^{-1}q} = \\ &= C \frac{1 - q^{(n-1)}(1+i)^{-n}q}{\frac{1}{(1+i)^{-1}} - q} = C \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \\ V_0(C, q)_{\overline{n}|i} &= C \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \end{aligned} \quad (13)$$



Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1 + i)^n$.

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (14)$$

y sustituyendo,

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = C \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} \quad (15)$$

■

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1 + i)^n$.

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (14)$$

y sustituyendo,

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = C \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} \quad (15)$$

■

Dada una renta variable en progresión geométrica de primer término 10 000 € que se incrementa anualmente un 20 %, si la duración de la misma es de 15 años y el interés del 6 % efectivo, se pide determinar el valor actual y final de la misma.

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1 + i)^n$.

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (14)$$

y sustituyendo,

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = C \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} \quad (15)$$

■

Dada una renta variable en progresión geométrica de primer término 10 000 € que se incrementa anualmente un 20 %, si la duración de la misma es de 15 años y el interés del 6 % efectivo, se pide determinar el valor actual y final de la misma. Utilizando (13):

$$V_0(10\,000; 1, 2)_{\overline{15}|0,06} = 10\,000 \frac{1 - 1,2^{15}(1 + 0,06)^{-15}}{1 + 0,06 - 1,2} = 10\,000 \frac{-5,4288}{-0,14} = 387\,772,27$$

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable temporal

El valor final se obtendrá capitalizando el valor actual, esto es, multiplicándolo por su factor de capitalización compuesta $(1 + i)^n$.

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (14)$$

y sustituyendo,

$$V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = C \frac{(1 + i)^n - q^n}{1 + i - q} \quad (15)$$

■

Dada una renta variable en progresión geométrica de primer término 10 000 € que se incrementa anualmente un 20 %, si la duración de la misma es de 15 años y el interés del 6 % efectivo, se pide determinar el valor actual y final de la misma. Utilizando (13):

$$V_0(10\,000; 1, 2)_{\overline{15}|0,06} = 10\,000 \frac{1 - 1,2^{15}(1 + 0,06)^{-15}}{1 + 0,06 - 1,2} = 10\,000 \frac{-5,4288}{-0,14} = 387\,772,27$$

Del mismo modo, sirviéndose de la relación entre el valor actual y final,

$$\begin{aligned} V_n(C, q)_{\overline{n}|i} &= V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \\ V_{15} &= V_0(1 + 0,06)^{15} = 387\,772,27 (1 + 0,06)^{15} = 929\,318,81 \end{aligned}$$

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta pospagable perpetua

En el supuesto de que se trate de una renta perpetua, para su cálculo, bastará con hacer tender n a infinito en la expresión de su valor actual (13):

$$V_0(C, q)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} V_0(C, q)_{n|i} = \frac{C}{1 + i - q}$$
$$V_0(C, q)_{\infty|i} = \frac{C}{1 + i - q} \quad (16)$$

para $1 + i > q$. ■

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta prepagable temporal

Si se trata de una renta prepagable, partiendo del principio de equivalencia financiera y del valor actual de una renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal, tal como hemos visto en (13):

$$\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i) \quad (17)$$

Igualmente, si se trata del valor final de una renta prepagable, bastará con actualizar el valor final de la renta pospagable, inmediata, variable en progresión geométrica y temporal.

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_n(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i) \quad (18)$$

Del mismo modo, partiendo del valor actual, podríamos capitalizar el mismo usando el factor de capitalización para obtener su valor final,

$$\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (19)$$

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta prepagable perpetua

En el supuesto de tratarse de una renta perpetua, la obtención del límite cuando n tiende a infinito del valor actual de la renta prepagable nos permitirá obtener su valor.

$$\begin{aligned}\ddot{V}_0(C, q)_{\infty|i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{V}_0(C, q)_{n|i} = \frac{C(1+i)}{1+i-q} \\ \ddot{V}_0(C, q)_{\infty|i} &= \frac{C(1+i)}{1+i-q}\end{aligned}\tag{20}$$

■

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta diferida y anticipada

La obtención del valor actual de una renta diferida p períodos, pospagable, temporal y variable en progresión geométrica, tal como vimos para una renta constante.

$${}_p/V_0(C, q)_{\overline{n}|i} = V_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^{-p} \quad (21)$$

Si se trata de una renta prepagable, procederemos del mismo modo,

$${}_p/\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C, q)_{\overline{n}|i} (1 + i)^{-p} \quad (22)$$

Cuando se trata de una renta perpetua, el valor actual, será el que corresponde a una temporal sobre la que obtendremos el límite cuando n tiende a ∞ .

$$\begin{aligned} {}_p/V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} {}_p/V_0(C, q)_{\overline{n}|i} \\ {}_p/V_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} &= \frac{C (1 + i)^{-p}}{1 + i - q} \end{aligned} \quad (23)$$

Rentas de términos variables en progresión geométrica. Renta diferida y anticipada

Si fuera prepagable,

$${}_p/\ddot{V}_0(C, q)_{\overline{\infty}|i} = \frac{C(1+i)^{-(p-1)}}{1+i-q} \quad (24)$$

■

En las rentas anticipadas, para la obtención del valor final puede aplicarse lo visto en la unidad anterior. El valor final, pospagable y temporal,

$${}_h/V_n(C, q)_{\overline{n}|i} = V_n(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i)^h \quad (25)$$

Si la renta es prepagable,

$${}_h/\ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_n(C, q)_{\overline{n}|i} (1+i)^h \quad (26)$$

■

- 1 Introducción
- 2 Rentas con fraccionamiento uniforme
 - Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
 - Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales
- 3 Rentas de términos variables en progresión geométrica
 - Renta pospagable temporal
 - Renta pospagable perpetua
 - Renta prepagable temporal
 - Renta prepagable perpetua
 - Renta diferida y anticipada
- 4 Rentas de términos variables en progresión aritmética
 - Renta pospagable temporal
 - Renta pospagable perpetua
 - Renta prepagable temporal
 - Renta prepagable perpetua
 - Renta diferida y anticipada
- 5 Rentas variables fraccionadas
- 6 Rentas variables en general con rédito periodal constante
 - Determinación de i . Método de Newton
 - Hoja de cálculo
 - Simplificación de Schneider
- 7 Gestión Financiera

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

Se caracterizan por seguir la cuantía de sus términos una progresión aritmética, siendo d la razón de la progresión, que puede ser positiva o negativa, si bien en este segundo caso, al ser los términos decrecientes, para que no aparezcan términos negativos o nulos es preciso imponer la condición $C + (n - 1)d > 0$, lo que implica que la razón d está acotada inferiormente por,

$$d > \frac{-C}{n - 1}$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

Se caracterizan por seguir la cuantía de sus términos una progresión aritmética, siendo d la razón de la progresión, que puede ser positiva o negativa, si bien en este segundo caso, al ser los términos decrecientes, para que no aparezcan términos negativos o nulos es preciso imponer la condición $C + (n - 1)d > 0$, lo que implica que la razón d está acotada inferiormente por,

$$d > \frac{-C}{n - 1}$$

La obtención del valor actual que designaremos como $V_0(C, d)_{\overline{n}|i}$ es,

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^n [C + (s - 1)d](1 + i)^{-s} = C a_{\overline{n}|i} + d \sum_{s=1}^n (s - 1)(1 + i)^{-s}$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

Se caracterizan por seguir la cuantía de sus términos una progresión aritmética, siendo d la razón de la progresión, que puede ser positiva o negativa, si bien en este segundo caso, al ser los términos decrecientes, para que no aparezcan términos negativos o nulos es preciso imponer la condición $C + (n - 1)d > 0$, lo que implica que la razón d está acotada inferiormente por,

$$d > \frac{-C}{n - 1}$$

La obtención del valor actual que designaremos como $V_0(C, d)_{\overline{n}|i}$ es,

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^n [C + (s - 1)d](1 + i)^{-s} = C a_{\overline{n}|i} + d \sum_{s=1}^n (s - 1)(1 + i)^{-s}$$

Por tanto, se puede escribir:

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = C a_{\overline{n}|i} + \frac{d}{i} [a_{\overline{n}|i} - n(1 + i)^{-n}]$$

de donde,

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d n (1 + i)^{-n}}{i}$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

sumando y restando $\frac{dn}{i}$ se obtiene la expresión:

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + dn \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \quad (27)$$

que resulta más cómoda al venir expresada en función de $a_{\overline{n}|i}$. ■

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

sumando y restando $\frac{dn}{i}$ se obtiene la expresión:

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + dn \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \quad (27)$$

que resulta más cómoda al venir expresada en función de $a_{\overline{n}|i}$. ■

El valor final, $V_n(C, d)_{\overline{n}|i}$ puede obtenerse de forma directa:

$$V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^n [C + (s-1)d](1+i)^{n-s}$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable temporal

sumando y restando $\frac{dn}{i}$ se obtiene la expresión:

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i} + dn\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \quad (27)$$

que resulta más cómoda al venir expresada en función de $a_{\overline{n}|i}$. ■

El valor final, $V_n(C, d)_{\overline{n}|i}$ puede obtenerse de forma directa:

$$V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^n [C + (s-1)d] (1+i)^{n-s}$$

o también, capitalizando el valor actual, es decir, multiplicando por $(1+i)^n$:

$$V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = V_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1+i)^n = \left[\left(C + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn(1+i)^{-n}}{i} \right] (1+i)^n$$

resultando,

$$V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = \left(C + \frac{d}{i}\right) s_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \quad (28)$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta pospagable perpetua

El valor inicial de una renta perpetua es el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de la correspondiente renta temporal, por tanto, el valor actual de la renta pospagable, variable en progresión aritmética perpetua es,

$$V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(C + \frac{d}{i} \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d n (1+i)^{-n}}{i} \right]$$

y dado que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|i} = a_{\infty|i} = \frac{1}{i}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1+i)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+i)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+i)^n \log_e(1+i)} = 0$$

resulta,

$$V_0(C, d)_{\infty|i} = \left(C + \frac{d}{i} \right) \frac{1}{i} = \frac{C}{i} + \frac{d}{i^2} \quad (29)$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta prepagable temporal

Si se trata en este caso de una renta temporal prepagable, su valor actual puede obtenerse en función de $V_0(C, d)_{\overline{n}|i}$,

$$\begin{aligned}\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} &= \sum_{s=0}^{n-1} [C + s d] (1 + i)^{-s} = \\ &= (1 + i) \sum_{s=1}^n [C + (s - 1) d] (1 + i)^{-s} = V_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i)\end{aligned}$$

resultando por tanto,

$$\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1 + i) \left[\left(C + \frac{d}{i} + d n \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d n}{i} \right] = V_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i) \quad (30)$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta prepagable temporal

Si se trata en este caso de una renta temporal prepagable, su valor actual puede obtenerse en función de $V_0(C, d)_{\overline{n}|i}$,

$$\begin{aligned}\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} &= \sum_{s=0}^{n-1} [C + s d] (1 + i)^{-s} = \\ &= (1 + i) \sum_{s=1}^n [C + (s - 1) d] (1 + i)^{-s} = V_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i)\end{aligned}$$

resultando por tanto,

$$\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1 + i) \left[\left(C + \frac{d}{i} + d n \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d n}{i} \right] = V_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i) \quad (30)$$

Igualmente, el valor final prepagable, se obtendrá capitalizando el valor actual,

$$\ddot{V}_n(C, d)_{\overline{n}|i} = \ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i)^n \quad (31)$$

o directamente,

$$\ddot{V}_n(C, d)_{\overline{n}|i} = V_n(C, d)_{\overline{n}|i} (1 + i) \quad (32)$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta prepagable perpetua

Si se trata de una renta prepagable perpetua, el valor inicial de la renta variable en progresión aritmética se obtiene,

$$\ddot{V}_0(C, d)_{\infty|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{V}(C, d)_{n|i} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i) V_0(C, d)_{n|i} = (1 + i) V_0(C, d)_{n|i}$$

resultando,

$$\ddot{V}_0(C, d)_{\infty|i} = \left(C + \frac{d}{i} \right) \frac{1 + i}{i} \quad (33)$$

■

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Del mismo modo que para las rentas variables en progresión geométrica, si la renta está diferida en p períodos de rédito constante i respecto del punto de valoración, su valor actual se obtiene multiplicando el valor inicial por $(1+i)^{-p}$. Si la renta está anticipada en h períodos de igual rédito i , su valor final será igual al valor final multiplicado por $(1+i)^h$.

$${}_p/V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} V_0(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (34)$$

sustituyendo,

$${}_p/V_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} \left[\left(C + \frac{d}{i} + dn \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \right]$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Del mismo modo que para las rentas variables en progresión geométrica, si la renta está diferida en p períodos de rédito constante i respecto del punto de valoración, su valor actual se obtiene multiplicando el valor inicial por $(1+i)^{-p}$. Si la renta está anticipada en h períodos de igual rédito i , su valor final será igual al valor final multiplicado por $(1+i)^h$.

$${}_pV_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} V_0(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (34)$$

sustituyendo,

$${}_pV_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} \left[\left(C + \frac{d}{i} + dn \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \right]$$

Si es prepagable,

$${}_p\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} \ddot{V}_0(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (35)$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Si se trata de una renta perpetua, procederemos del mismo modo,

$${}_p/V_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p} V_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} \quad (36)$$

$${}_p/\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p} \ddot{V}_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} \quad (37)$$

Si se trata de una renta anticipada, su valor final, será,

$${}_h/V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h V_n(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (38)$$

y sustituyendo,

$${}_h/V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \left[\left(C + \frac{d}{i} \right) s_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \right]$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Si se trata de una renta perpetua, procederemos del mismo modo,

$${}_p/V_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p} V_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} \quad (36)$$

$${}_p/\ddot{V}_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-p} \ddot{V}_0(C, d)_{\overline{\infty}|i} \quad (37)$$

Si se trata de una renta anticipada, su valor final, será,

$${}_h/V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h V_n(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (38)$$

y sustituyendo,

$${}_h/V_n(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \left[\left(C + \frac{d}{i} \right) s_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i} \right]$$

que en el supuesto de que fuera prepagable, sería,

$${}_h/\ddot{V}_n(C, d)_{\overline{n}|i} = (1+i)^h \ddot{V}_n(C, d)_{\overline{n}|i} \quad (39)$$

■

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Determinar el valor en el momento actual de una renta anual variable en progresión aritmética, de primer término 10 000 €, razón 2 000 €, rédito periodal constante $i = 0,06$, que comenzará a devengarse una vez transcurridos 3 años, en los supuestos de que se trate de una renta prepagable de 20 años de duración o de una renta pospagable perpetua.

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Determinar el valor en el momento actual de una renta anual variable en progresión aritmética, de primer término 10 000 €, razón 2 000 €, rédito periodal constante $i = 0,06$, que comenzará a devengarse una vez transcurridos 3 años, en los supuestos de que se trate de una renta prepagable de 20 años de duración o de una renta pospagable perpetua.

En el primer supuesto,

$$\begin{aligned} {}_3/\ddot{V}_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} &= (1 + 0,06)^{-3} \ddot{V}_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} = \\ &= (1 + 0,06)^{-2} V_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} = \\ &= 1,06^{-2} \left[\left(10\,000 + \frac{2\,000}{0,06} + 2\,000 \cdot 20 \right) a_{\overline{20}|0,06} - \frac{2\,000 \cdot 20}{0,06} \right] = \\ &= 0,889996[83\,333,33 \cdot 11,469921 - 666\,666,66] = 257\,351,33 \end{aligned}$$

Rentas de términos variables en progresión aritmética. Renta diferida y anticipada

Determinar el valor en el momento actual de una renta anual variable en progresión aritmética, de primer término 10 000 €, razón 2 000 €, rédito periodal constante $i = 0,06$, que comenzará a devengarse una vez transcurridos 3 años, en los supuestos de que se trate de una renta prepagable de 20 años de duración o de una renta pospagable perpetua.

En el primer supuesto,

$$\begin{aligned} {}_3/\ddot{V}_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} &= (1 + 0,06)^{-3} \ddot{V}_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} = \\ &= (1 + 0,06)^{-2} V_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{20}|0,06} = \\ &= 1,06^{-2} \left[\left(10\,000 + \frac{2\,000}{0,06} + 2\,000 \cdot 20 \right) a_{\overline{20}|0,06} - \frac{2\,000 \cdot 20}{0,06} \right] = \\ &= 0,889996[83\,333,33 \cdot 11,469921 - 666\,666,66] = 257\,351,33 \end{aligned}$$

En el segundo caso,

$$\begin{aligned} {}_3/V_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{\infty}|0,06} &= (1 + 0,06)^{-3} V_0(10\,000; 2\,000)_{\overline{\infty}|0,06} = \\ &= (1 + 0,06)^{-3} \left(10\,000 + \frac{2\,000}{0,06} \right) \frac{1}{0,06} = 0,839619 \cdot 722\,222,22 = 606\,391,70 \end{aligned}$$

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

Rentas variables fraccionadas

En las rentas constantes y en general, el tipo de interés i y el período de vencimiento del capital n deben estar expresados en la misma unidad. En las rentas fraccionadas variables, supuesto muy habitual en el mercado, el capital vence en una unidad inferior a la del tanto. Para resolver este supuesto, podemos sustituir todos los capitales pertenecientes a los subperíodos por un único expresado en la misma unidad de tiempo que la razón de la variación o utilizar las siguientes expresiones, Partiendo de la expresión (13),

$$V_0^{(m)}(C, q)_{\overline{n}|i} = C m \frac{i}{J^{(m)}} \frac{1 - q^n (1 + i)^{-n}}{1 + i - q} \quad (40)$$

■

A partir de (27),

$$V_0^{(m)}(C, d)_{\overline{n}|i} = \frac{i}{J^{(m)}} \left(C m + \frac{d}{i} + d n \right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d n}{i} \quad (41)$$

■

El resto de valores se obtendrían multiplicando por sus relaciones.

Rentas variables fraccionadas

Determinar el valor actual de una renta trimestral de 300 €, de 4 años de duración con un incremento anual del 10 % si se valora a una TAE del 5 %.

Rentas variables fraccionadas

Determinar el valor actual de una renta trimestral de 300 €, de 4 años de duración con un incremento anual del 10 % si se valora a una TAE del 5 %.

Si optamos por obtener el capital anual equivalente a las aportaciones trimestrales,

$$i^{(4)} = (1 + 0,05)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,012272 \qquad V_n = 300 s_{\overline{4}|0,012272}$$

$$V_n = 300 \frac{(1 + 0,012272)^4 - 1}{0,012272} = 1\,222,2713$$

En este caso, el valor equivalente anual de 1 222,27 € es el término C y utilizando (13),

$$V_0(C, q)^{\overline{n}|i} \qquad V_0(1\,222,27; 1,1)^{\overline{4}|0,05}$$

$$V_0 = 1\,222,2713 \frac{1 - 1,1^4 (1 + 0,05)^{-4}}{1 + 0,05 - 1,1} = 4\,999,54$$

Si aplicamos directamente la expresión (40), entonces,

$$J^{(4)} = 4 \cdot 0,012272 = 0,049089$$

$$V_0 = 300 \cdot 4 \frac{0,05}{0,049089} \frac{1 - 1,1^4 (1 + 0,05)^{-4}}{1 + 0,05 - 1,1}$$

y por tanto, el valor actual,

$$V_0 = 1\,200 \cdot 1,018559 \cdot 4,090374 = 4\,999,54$$

- 1 Introducción
- 2 Rentas con fraccionamiento uniforme
 - Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
 - Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales
- 3 Rentas de términos variables en progresión geométrica
 - Renta pospagable temporal
 - Renta pospagable perpetua
 - Renta prepagable temporal
 - Renta prepagable perpetua
 - Renta diferida y anticipada
- 4 Rentas de términos variables en progresión aritmética
 - Renta pospagable temporal
 - Renta pospagable perpetua
 - Renta prepagable temporal
 - Renta prepagable perpetua
 - Renta diferida y anticipada
- 5 Rentas variables fraccionadas
- 6 Rentas variables en general con rédito periodal constante
 - Determinación de i . Método de Newton
 - Hoja de cálculo
 - Simplificación de Schneider
- 7 Gestión Financiera

Rentas variables en general con rédito periodal constante

En muchas operaciones financieras los términos de las mismas no son constantes, ni tampoco variables en base a una progresión conocida. En realidad, son variables de forma aleatoria.

Rentas variables en general con rédito periodal constante

En muchas operaciones financieras los términos de las mismas no son constantes, ni tampoco variables en base a una progresión conocida. En realidad, son variables de forma aleatoria.

En estos casos, existe la dificultad técnica de poder calcular la rentabilidad de la operación. Para ello, y tanto para las operaciones de inversión como las de financiación, se utilizan diferentes métodos.

Rentas variables en general con rédito periodal constante

En muchas operaciones financieras los términos de las mismas no son constantes, ni tampoco variables en base a una progresión conocida. En realidad, son variables de forma aleatoria.

En estos casos, existe la dificultad técnica de poder calcular la rentabilidad de la operación. Para ello, y tanto para las operaciones de inversión como las de financiación, se utilizan diferentes métodos.

Los más extendidos son el *Valor Actual Neto*, (VAN), y el denominado tanto o *Tasa Interna de Rendimiento* o retorno (TIR).

Rentas variables en general con rédito periodal constante

Así, ante una operación financiera consistente en el intercambio de capitales financieros cuyos términos no son iguales en capitalización compuesta,

$$V_0 = \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

si igualamos a 0, podemos obtener el valor de i . Definiremos TIR de esta operación financiera al número real i , solución de la ecuación:

$$\sum_{s=1}^n C_s(1+i)^{-s} = \sum_{t=1}^n C_t(1+i)^{-t}$$



Rentas variables en general con rédito periodal constante

Evidentemente, n e i , deberán estar expresados en la misma unidad. La TIR obtenida estará en función de la unidad de tiempo con la que se esté trabajando. Si es el año, la TIR obtenida será el interés efectivo anual; si por el contrario la unidad de tiempo fuera una fracción de m , entonces la TIR expresada como tasa anual equivalente vendrá dada por $i = (1 + i^{(m)})^m - 1$.

Hay que tener en cuenta que para las operaciones financieras generales, la TIR no siempre existe ni tiene por qué ser única. De hecho, constituye una ecuación algebraica de grado p , siendo $p \geq (m + n)$ que puede presentar hasta p soluciones reales.

Si existe la TIR y es positiva, puede interpretarse como el tipo de interés efectivo periodal constante que bajo el régimen de capitalización compuesta iguala el valor financiero de los capitales de la prestación con el valor financiero de los capitales de la contraprestación, es decir, como la remuneración o coste que supone para las partes llevar a cabo la operación financiera.

Rentas variables en general con rédito periodal constante

Para su cálculo, podemos emplear:

- Métodos directos, que permiten obtener i a través del cálculo de la tasa de retorno resultante como:
 - Método de Newton,
 - Una calculadora financiera,
 - Una hoja de cálculo,
- Métodos aproximados, como:
 - La interpolación lineal, y
 - La aproximación de Schneider,
 - Estimación heurística.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

En general, no existe una fórmula que permita calcular las raíces de la ecuación que se plantea para la obtención del TIR de las operaciones financieras. El método de Newton, constituye un método numérico para obtener dichas raíces cuando los capitales de la prestación preceden a los de la contraprestación.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

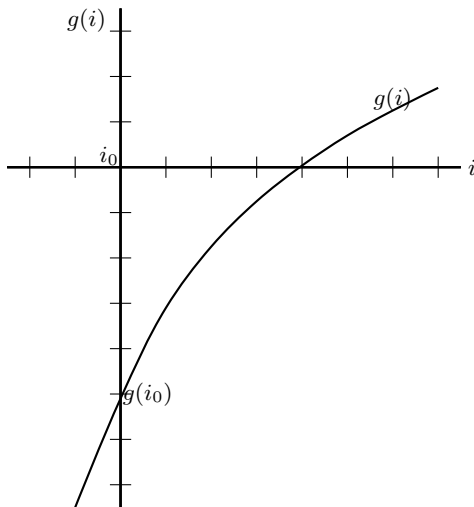
En general, no existe una fórmula que permita calcular las raíces de la ecuación que se plantea para la obtención del TIR de las operaciones financieras. El método de Newton, constituye un método numérico para obtener dichas raíces cuando los capitales de la prestación preceden a los de la contraprestación.

En este caso, por las propiedades de $g(i)$, resulta particularmente simple y eficiente la aplicación de éste método de la tangente. Consiste básicamente en lo siguiente:

Fijado un valor inicial para la variable incógnita i_0 , se calcula a partir de él un nuevo valor i_1 , utilizando un algoritmo $i_1 = F(i_0)$ que garantice que la distancia de i_1 a la solución de la ecuación $g(i) = 0$ (solución que denotaremos como i^*) sea menor que la distancia de i_0 a la misma. Este algoritmo se repetirá hasta que se alcance un nivel de error lo suficientemente pequeño.

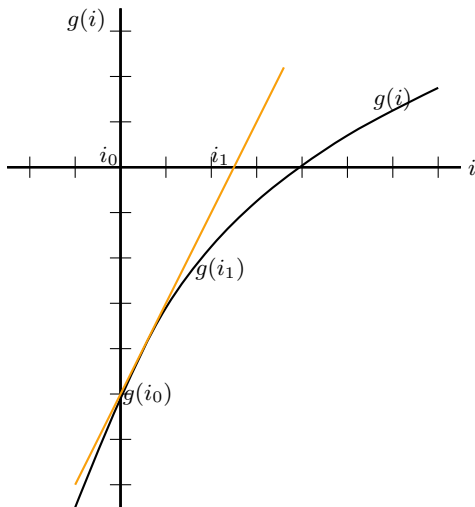
Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton



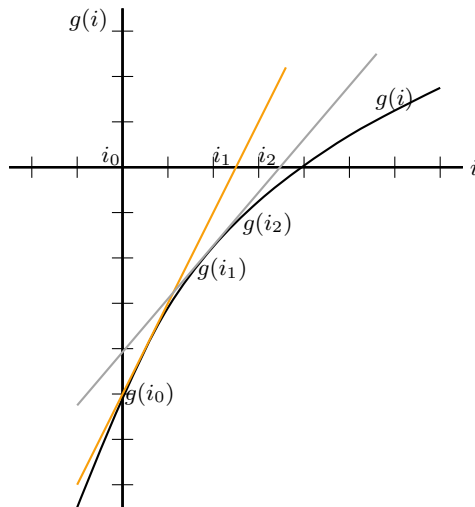
Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton



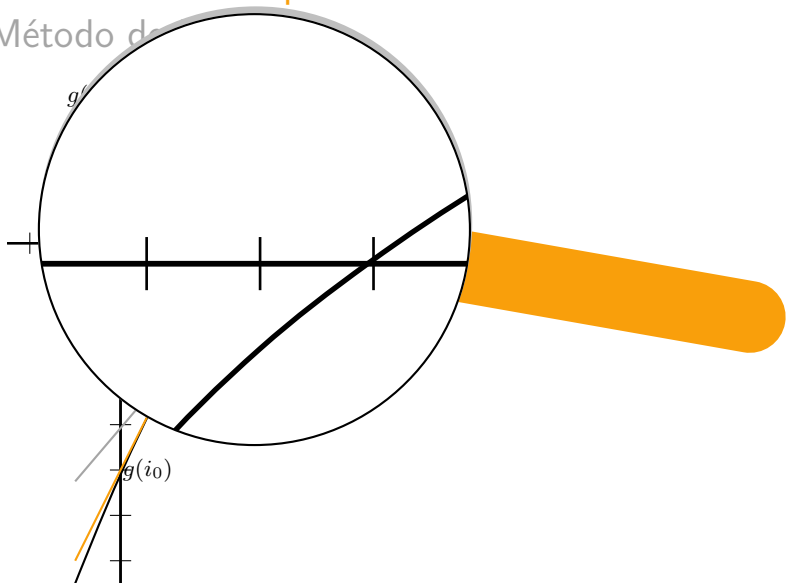
Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton



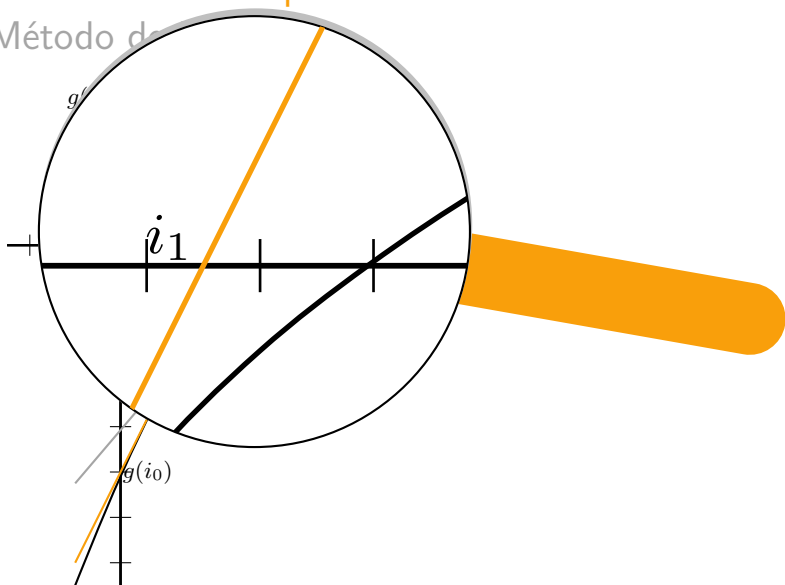
Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de



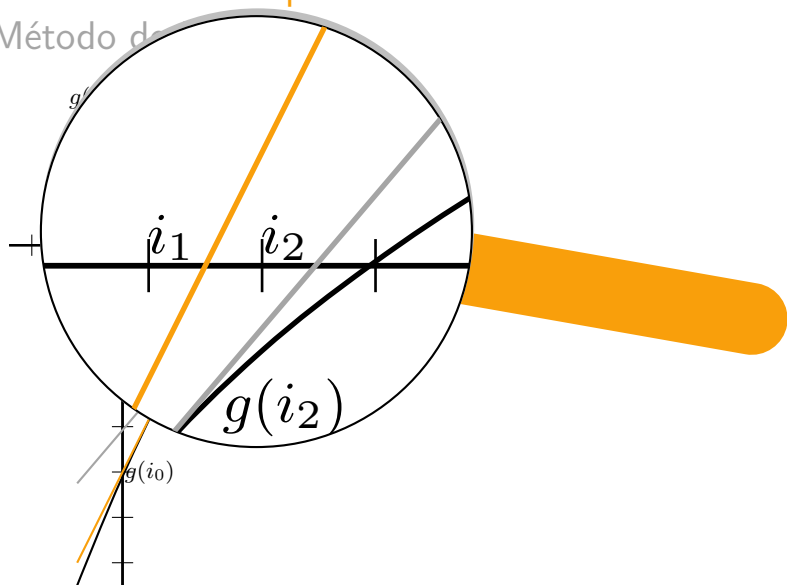
Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de



Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de



Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de

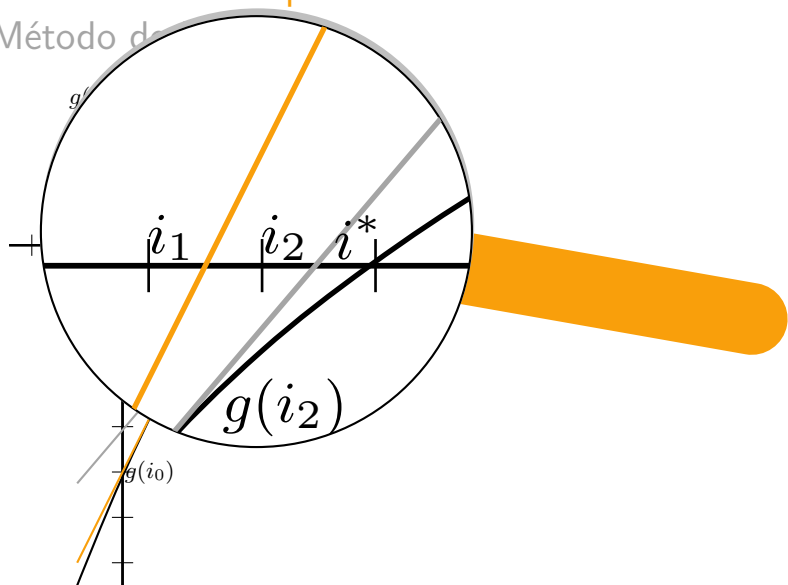


Figura: Método de Newton. Determinación de i

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Se escoge un valor inicial i_0 lo suficientemente pequeño, de tal forma que $i_0 < i^*$, siendo i^* el TIR. Dado que $g(i)$ es una función creciente y cóncava, la tangente a la curva $g(i)$ en i_0 atravesará el eje de abscisas en un punto i_1 interior al intervalo $[i_0, i^*]$; por tanto, el valor de i_1 proporcionará una aproximación por defecto a la solución i^* . Si se procede de nuevo a trazar una nueva recta tangente a la curva en el punto $(i_1, g(i_1))$, ésta intersectará al eje de abscisas en un punto interior al intervalo $[i_1, i^*]$. Repitiendo el proceso, y como consecuencia de las propiedades de la función $g(i)$, tras “ n ” pasos se verificará la siguiente desigualdad:

$$i_n < i_{n+1} < i^* \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es inmediato observar que,

$$g'(i_n) = \frac{-g(i_n)}{i_{n+1} - i_n}$$

por lo que,

$$i_{n+1} = i_n - \frac{g(i_n)}{g'(i_n)} \quad (42)$$

expresión que constituye el algoritmo de Newton para resolver la ecuación que proporciona el TIR de una operación financiera como la descrita.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \dots$ que se irá aproximando por defecto a i^* . El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \dots$ que se irá aproximando por defecto a i^* . El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

En una operación financiera en la que se imponen 5 000€ y al cabo de 4 años el montante es de 6 324,30€, determinar el tipo de interés i de la misma.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \dots$ que se irá aproximando por defecto a i^* . El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

En una operación financiera en la que se imponen 5 000€ y al cabo de 4 años el montante es de 6 324,30€, determinar el tipo de interés i de la misma.

Utilizando la expresión $C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$

$$5\,000 = 6\,324,30 (1 + i)^{-4} \qquad g(i) = 5\,000 - 6\,324,30 (1 + i)^{-4} = 0$$

Si $i = 0$

$$5\,000 - 6\,324,30 = -1\,324,30$$

$$g'(i) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_0) = g'(0) = 31\,621,50 - 6\,324,30 = 25\,297,20$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Repitiendo de forma indefinida este algoritmo se obtiene una sucesión creciente $i_0, i_1, i_2, \dots$ que se irá aproximando por defecto a i^* . El proceso, se detendrá cuando la mejora obtenida se considere despreciable, esto es, cuando $i_{n+1} - i_n < \epsilon$ siendo ϵ un número positivo fijado de antemano.

En una operación financiera en la que se imponen 5 000€ y al cabo de 4 años el montante es de 6 324,30€, determinar el tipo de interés i de la misma.

Utilizando la expresión $C_0 = C_n (1 + i)^{-n}$

$$5\,000 = 6\,324,30 (1 + i)^{-4} \qquad g(i) = 5\,000 - 6\,324,30 (1 + i)^{-4} = 0$$

Si $i = 0$

$$5\,000 - 6\,324,30 = -1\,324,30$$

$$g'(i) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_0) = g'(0) = 31\,621,50 - 6\,324,30 = 25\,297,20$$

Si $i = 1$

$$i_1 = i_0 - \frac{g(i_0)}{g'(i_0)} = 0 - \frac{-1\,324,30}{25\,297,20} = 0,0523497$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_1 - i_0 = 0,0523497 > \epsilon$, y repetimos el proceso.

$$g(i_1) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0523497)^{-4} = -156,69$$

$$g'(i_1) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_1) = g'(0,053497) = 19\,600,72$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_1 - i_0 = 0,0523497 > \epsilon$, y repetimos el proceso.

$$g(i_1) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0523497)^{-4} = -156,69$$

$$g'(i_1) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_1) = g'(0,053497) = 19\,600,72$$

Si $i = 2$

$$i_2 = i_1 - \frac{g(i_1)}{g'(i_1)} = 0,0523497 - \frac{-156,69}{19\,600,72} = 0,0603438$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_2 - i_1 = 0,0603438 - 0,0523497 = 0,0079941$, y repetimos el proceso.

$$g(i_2) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0603438)^{-4} = -2,9441840$$

$$g'(i_2) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_2) = g'(0,0603438) = 18\,872,91$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_1 - i_0 = 0,0523497 > \epsilon$, y repetimos el proceso.

$$g(i_1) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0523497)^{-4} = -156,69$$

$$g'(i_1) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_1) = g'(0,053497) = 19\,600,72$$

Si $i = 2$

$$i_2 = i_1 - \frac{g(i_1)}{g'(i_1)} = 0,0523497 - \frac{-156,69}{19\,600,72} = 0,0603438$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_2 - i_1 = 0,0603438 - 0,0523497 = 0,0079941$, y repetimos el proceso.

$$g(i_2) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0603438)^{-4} = -2,9441840$$

$$g'(i_2) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_2) = g'(0,0603438) = 18\,872,91$$

Si $i = 3$

$$i_3 = i_2 - \frac{g(i_2)}{g'(i_2)} = 0,0603438 - \frac{-2,9441840}{18\,872,91} = 0,0604998$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_3 - i_2 = 0,0604998 - 0,0603438 = 0,0001560 > \epsilon$, repetimos el proceso.

$$g(i_3) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0604998)^{-4} = -0,0010920$$

$$g'(i_3) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_3) = g'(0,0604998) = 18\,859,03$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Determinación de i . Método de Newton

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_3 - i_2 = 0,0604998 - 0,0603438 = 0,0001560 > \epsilon$, repetimos el proceso.

$$g(i_3) = 5\,000 - 6\,324,30(1 + 0,0604998)^{-4} = -0,0010920$$

$$g'(i_3) = 6\,324,30 \cdot 4(1 + i)^{-5}$$

$$g'(i_3) = g'(0,0604998) = 18\,859,03$$

Si $i = 4$

$$i_4 = i_3 - \frac{g(i_3)}{g'(i_3)} = 0,0604998 - \frac{-0,0010920}{18\,859,03} = 0,0604999$$

Si $\epsilon = 0,0001$, $i_4 - i_3 = 0,0604999 - 0,0604998 = 0,0000001$, y como $i_4 - i_3 < \epsilon$, terminamos el proceso de iteración. La raíz de la ecuación $g(i) = 0$, es $i^* = 0,0604999 \approx 6,05\%$ con un error de aproximación de 0,0001.

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo

Empleando una hoja de cálculo como Excel o Calc. La función TASA, devuelve la tasa de interés por período de una anualidad. TASA se calcula por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de TASA no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, TASA devuelve el valor de error #¡NUM!

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo

Empleando una hoja de cálculo como Excel o Calc. La función TASA, devuelve la tasa de interés por período de una anualidad. TASA se calcula por iteración y puede tener cero o más soluciones. Si los resultados sucesivos de TASA no convergen dentro de 0,0000001 después de 20 iteraciones, TASA devuelve el valor de error #¡NUM!

La sintaxis en Excel, sería,

`TASA(nper;pago;va;vf;tipo;estimar)`

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo

Puede verse la función VA en la ayuda de Excel para obtener una descripción completa de los argumentos nper; pago; va; vf y tipo. No obstante, las variables, se pueden describir del siguiente modo y con la correspondencia a las que venimos empleando.

nper	n
pago	C
va	V_0
vf	V_n
tipo	0 ó 1, pospagable o prepagable

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo

Puede verse la función VA en la ayuda de Excel para obtener una descripción completa de los argumentos nper; pago; va; vf y tipo. No obstante, las variables, se pueden describir del siguiente modo y con la correspondencia a las que venimos empleando.

nper	n
pago	C
va	V_0
vf	V_n
tipo	0 ó 1, pospagable o prepagable

La sintaxis de las funciones es,

```
NPHER(tasa;pago;va;[vf];[tipo])  
PAGO(tasa;nper;va;vf;[tipo])  
VA(tasa;nper;pago;[vf];[tipo])  
VF(tasa;nper;pago;[va];[tipo])
```

que permiten obtener las otras variables vistas.

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo

La función TIR devuelve la tasa interna de retorno de los flujos de caja representados por los números del argumento valores. Estos flujos de caja o términos no tienen por que ser constantes, como es el caso en una anualidad como hemos visto en TASA. Sin embargo, los flujos de caja deben ocurrir en intervalos regulares, como meses o años. La tasa interna de retorno equivale al tipo o tasa de interés i producida por un proyecto de inversión que se produce en períodos regulares. La sintaxis en Excel, sería,

TIR(valores; [estimar])

Con los siguientes argumentos:

Son valores obligatorios una matriz o una referencia a celdas que contienen los números o términos para los cuales desea calcular la tasa interna de retorno. El argumento valores debe contener al menos un valor positivo y uno negativo para calcular la tasa interna de retorno. El TIR interpreta el orden de los flujos de caja siguiendo el orden del argumento valores. Asegúrese de escribir los importes de los pagos e ingresos en el orden correcto. Si un argumento matricial o de referencia contiene texto, valores lógicos o celdas vacías, esos se pasan por alto.

El valor `estimar` es opcional. Se puede utilizar un número que el usuario estima que se aproximará al resultado de TIR. Excel utiliza una técnica iterativa para el cálculo de TIR. Comenzando con el argumento `estimar`, TIR reitera el cálculo hasta que el resultado obtenido tenga una exactitud de 0,00001 %. Si la TIR no llega a un resultado después de 20 intentos, devuelve el valor de error `#¡NUM!`. En la mayoría de los casos no necesita proporcionar el argumento `estimar` para el cálculo de la TIR. Si se omite el argumento `estimar`, se supondrá que es 0,1 (10 %). Si la TIR devuelve el valor de error `#¡NUM!`, o si el valor no se aproxima a su estimación, realice un nuevo intento con un valor diferente.

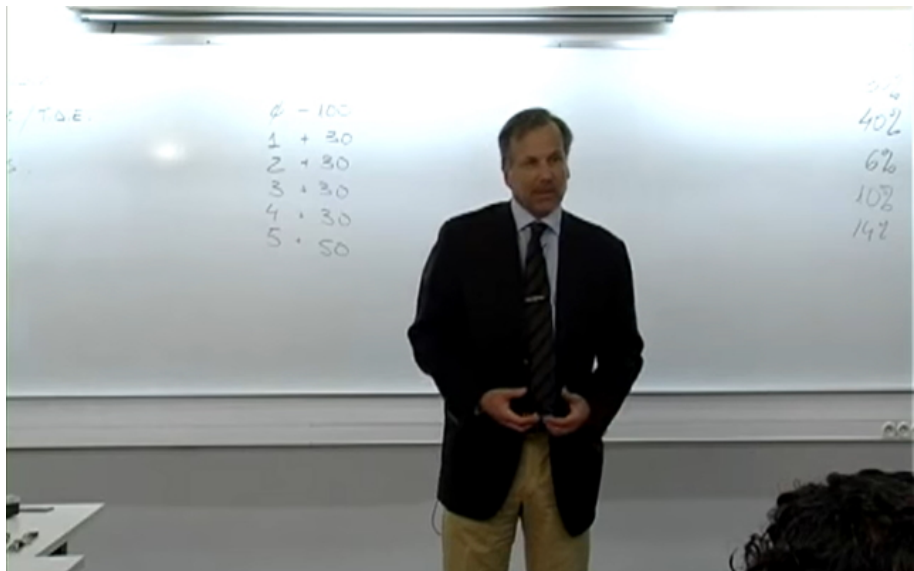
El valor `estimar` es opcional. Se puede utilizar un número que el usuario estima que se aproximará al resultado de TIR. Excel utiliza una técnica iterativa para el cálculo de TIR. Comenzando con el argumento `estimar`, TIR reitera el cálculo hasta que el resultado obtenido tenga una exactitud de 0,00001 %. Si la TIR no llega a un resultado después de 20 intentos, devuelve el valor de error `#¡NUM!`. En la mayoría de los casos no necesita proporcionar el argumento `estimar` para el cálculo de la TIR. Si se omite el argumento `estimar`, se supondrá que es 0,1 (10 %). Si la TIR devuelve el valor de error `#¡NUM!`, o si el valor no se aproxima a su estimación, realice un nuevo intento con un valor diferente.

Es posible obtener una aproximación heurística de este primer valor de i_0 como estimación inicial. Para ello, podemos utilizar la siguiente expresión,

$$i_0 = \left[\frac{\sum_{s=1}^n C_s}{V_0} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 \quad (43)$$

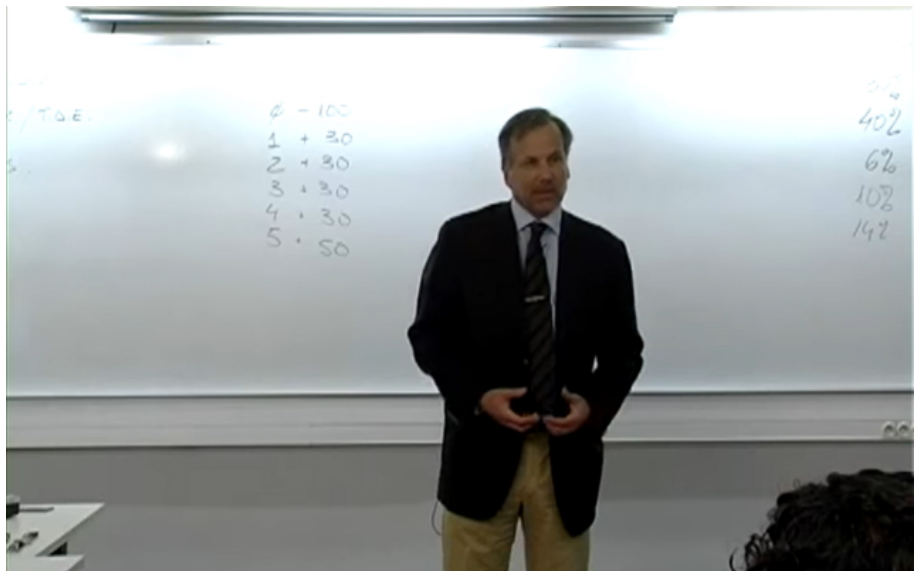
que nos permitiría obtener un valor inicial que podemos utilizar en `estimar` de la función.

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo



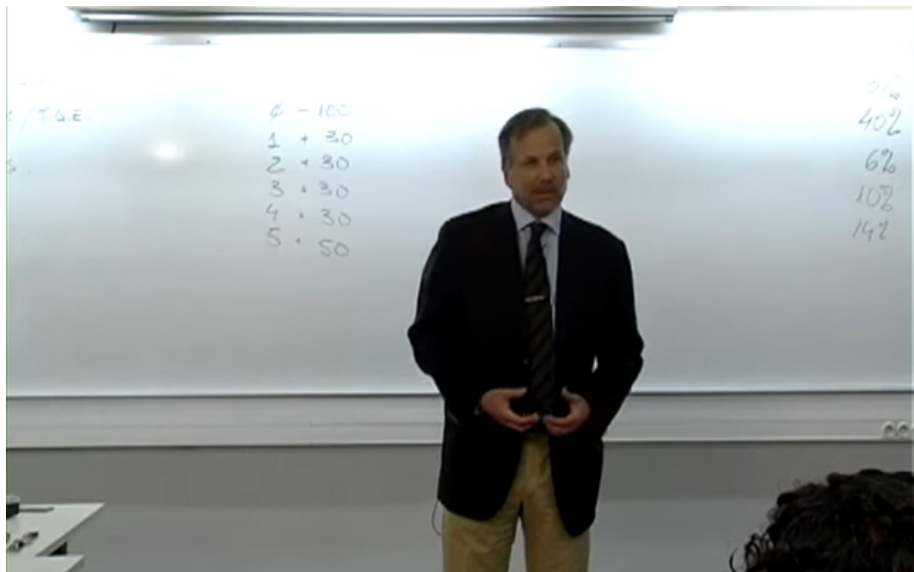
Video Web: VAN. Formulación y cálculo. I

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo



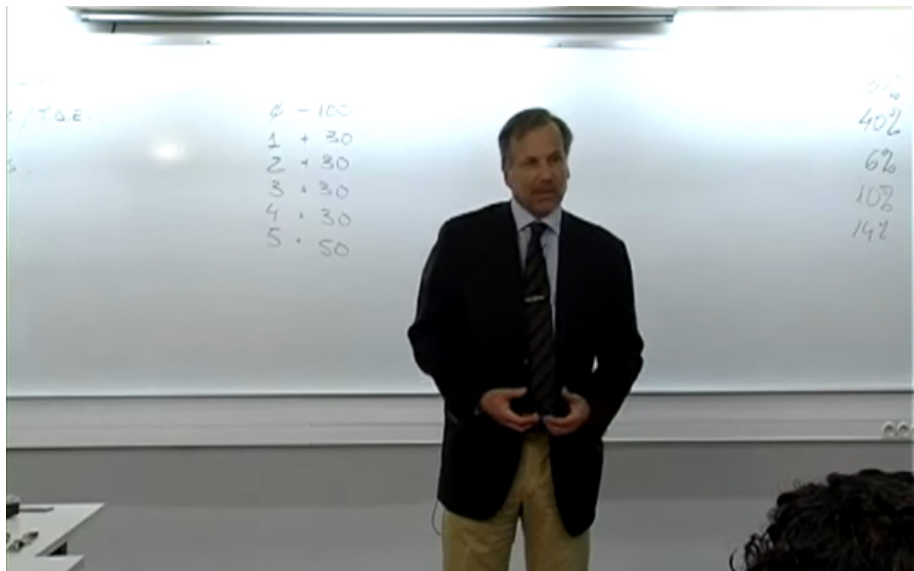
Video Web: VAN. Formulación y cálculo. II

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo



Video Web: VAN-TIR. Formulación y cálculo. I

Rentas variables en general con rédito periodal constante. Hoja de cálculo



Video Web: VAN-TIR. Formulación y cálculo. II

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

En este caso, Erich Schneider propone la sustitución de la ley financiera de descuento compuesto por el descuento simple.

$$V_0 = C_1(1 - i) + C_2(1 - 2i) + \cdots + C_n(1 - ni)$$

de donde,

$$i = \frac{-V_0 + \sum_{k=1}^n C_k}{\sum_{k=1}^n k C_k} \quad (44)$$

La fórmula (44) sólo nos proporciona un valor aproximado de i (la tasa de retorno). Esta aproximación será tanto mayor cuanto menor sea el valor de i , ya que así, menor será el valor de los términos que se desprecian. ■

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

De un préstamo por 1 000 000 €, los gastos de formalización, ascienden a 30 000 € (el 3 %). El préstamo, se valora al 5 % de interés efectivo pagadero por anualidades vencidas en 4 años. Determinar la TAE.

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

De un préstamo por 1 000 000 €, los gastos de formalización, ascienden a 30 000 € (el 3 %). El préstamo, se valora al 5 % de interés efectivo pagadero por anualidades vencidas en 4 años. Determinar la TAE.

$$C_0 = a a_{\overline{n}|i}$$

$$1\,000\,000 = a a_{\overline{4}|0,05} \qquad a = \frac{1\,000\,000}{a_{\overline{4}|0,05}} = 282\,011,83$$

Si el valor recibido es: $1\,000\,000 - 30\,000 = 970\,000$, el interés efectivo i , sería,

$$970\,000 = 282\,011,83 a_{\overline{4}|i}$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

- Por el valor actual, utilizando una calculadora financiera u hoja de cálculo,

$$970\,000 = \frac{282\,011,83}{(1+i)^1} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^2} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^3} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^4}$$

igualando y resolviendo, $i = 6,324\%$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

- Por el valor actual, utilizando una calculadora financiera u hoja de cálculo,

$$970\,000 = \frac{282\,011,83}{(1+i)^1} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^2} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^3} + \frac{282\,011,83}{(1+i)^4}$$

igualando y resolviendo, $i = 6,324\%$

- Interpolando,

$$\frac{970\,000}{282\,011,83} = 3,439572$$

utilizando la aproximación de la interpolación lineal y obteniendo los valores en las tablas financieras,

$$\frac{3,4395 - 3,3872}{3,4651 - 3,3872} = \frac{i - 0,07}{0,06 - 0,07}$$

$$i = (0,672298 \cdot -0,01) + 0,07 \qquad i = 0,063277 \qquad i = 6,328\%$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

- Utilizando la aproximación de Schneider,

$$V_0 = C(1 - i) + C(1 - 2i) + \cdots + C(1 - ni)$$

$$\begin{aligned} 970\,000 &= 282\,011,83(1 - i) + 282\,011,83(1 - 2i) + \\ &\quad + 282\,011,83(1 - 3i) + 282\,011,83(1 - 4i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 970\,000 &= (282\,011,83 \cdot 4) - (282\,011,83 + 282\,011,83 \cdot 2 + \\ &\quad + 282\,011,83 \cdot 3 + 282\,011,83 \cdot 4)i \end{aligned}$$

$$i = \frac{-970\,000 + 282\,011,83 \cdot 4}{2\,820\,118,30} \qquad i = 0,056043 \qquad i = 5,604\%$$

Rentas variables en general con rédito periodal constante.

Simplificación de Schneider

- Utilizando la aproximación de Schneider,

$$V_0 = C(1 - i) + C(1 - 2i) + \cdots + C(1 - ni)$$

$$\begin{aligned} 970\,000 &= 282\,011,83(1 - i) + 282\,011,83(1 - 2i) + \\ &+ 282\,011,83(1 - 3i) + 282\,011,83(1 - 4i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 970\,000 &= (282\,011,83 \cdot 4) - (282\,011,83 + 282\,011,83 \cdot 2 + \\ &+ 282\,011,83 \cdot 3 + 282\,011,83 \cdot 4)i \end{aligned}$$

$$i = \frac{-970\,000 + 282\,011,83 \cdot 4}{2\,820\,118,30} \qquad i = 0,056043 \qquad i = 5,604\%$$

- Estimando el valor inicial de i por el método heurístico,

$$i_0 = 2 \frac{\frac{970\,000 - 0}{4} - 282\,011,83}{(0 - 970\,000) - 1 \left(\frac{970\,000 - 0}{4} \right)}$$

$$i_0 = 2 \frac{-39\,511,83}{-1\,212\,500} = 0,065174 \qquad i_0 = 6,517\%$$

1 Introducción

2 Rentas con fraccionamiento uniforme

- Rentas fraccionadas, diferidas y anticipadas
- Ecuación general de las rentas constantes, inmediatas y temporales

3 Rentas de términos variables en progresión geométrica

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

4 Rentas de términos variables en progresión aritmética

- Renta pospagable temporal
- Renta pospagable perpetua
- Renta prepagable temporal
- Renta prepagable perpetua
- Renta diferida y anticipada

5 Rentas variables fraccionadas

6 Rentas variables en general con rédito periodal constante

- Determinación de i . Método de Newton
- Hoja de cálculo
- Simplificación de Schneider

7 Gestión Financiera

Gracias por su atención