Gestión Financiera.

5 > Rentas financieras

Juan Carlos Mira Navarro

Introducción

Podemos establecer estas *cinco variables*:

$\boxed{n}$ $\boxed{i}$ $\boxed{V_0}$ $\boxed{C}$ $\boxed{V_n}$

Introducción

Podemos establecer estas *cinco variables*:

$$\boxed{n} \quad \boxed{i} \quad \boxed{V_0} \quad \boxed{C} \quad \boxed{V_n}$$

Las variables a considerar, son:

n = número de períodos, tiempo. Tiempo transcurrido,

i = tasa o tipo de interés. Remuneración al capital,

V_0 = valor actual o capital inicial, Capital impuesto, o Capital recibido,

C = Pago, o Aportación,

V_n = valor final o montante de la operación, Capital obtenido, o Capital a devolver.

n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Introducción

Podemos establecer estas *cinco variables*:

$$\boxed{n} \quad \boxed{i} \quad \boxed{V_0} \quad \boxed{C} \quad \boxed{V_n}$$

Las variables a considerar, son:

$$\begin{aligned} n &= \text{número de períodos, tiempo. Tiempo transcurrido,} \\ i &= \text{tasa o tipo de interés. Remuneración al capital,} \\ V_0 &= \text{valor actual o capital inicial, Capital impuesto, o Capital recibido,} \\ C &= \text{Pago, o Aportación,} \\ V_n &= \text{valor final o montante de la operación, Capital obtenido, o Capital a devolver.} \end{aligned}$$

n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Versión imprimible

Concepto de renta

En el lenguaje corriente, renta es una sucesión de cobros o pagos periódicos, que tienen el carácter de rendimiento de un capital (como la rentabilidad o alquiler de un inmueble, las amortizaciones de un préstamo, las aportaciones a un plan de pensiones, . . .); en matemática financiera, el concepto es muy amplio y corresponde a un conjunto de prestaciones (monetarias) con vencimientos diversos. A cada una de las prestaciones se le llama *plazo* o *término* de la renta, y llamaremos *período* al espacio de tiempo (generalmente un año) que hay entre dos prestaciones consecutivas.

Concepto de renta

En el lenguaje corriente, renta es una sucesión de cobros o pagos periódicos, que tienen el carácter de rendimiento de un capital (como la rentabilidad o alquiler de un inmueble, las amortizaciones de un préstamo, las aportaciones a un plan de pensiones, ...); en matemática financiera, el concepto es muy amplio y corresponde a un conjunto de prestaciones (monetarias) con vencimientos diversos. A cada una de las prestaciones se le llama *plazo* o *término* de la renta, y llamaremos *período* al espacio de tiempo (generalmente un año) que hay entre dos prestaciones consecutivas.

En cuanto al *origen* y *duración* de la renta, tienen un significado claro cuando la renta es contínua o periódica; *origen* es entonces la fecha de comienzo de las prestaciones y *duración* es el intervalo entre el principio y el final de las prestaciones.

Concepto de renta

En relación con el *objeto* de las rentas, éste está íntimamente ligado al de su valoración, se trata pues de encontrar un valor de la renta en un momento determinado del tiempo. De esta forma se puede determinar: el *valor final* en un momento cualquiera no anterior al vencimiento del último término, el *valor actual* en cualquier momento no posterior al vencimiento del primer término y eventualmente el *valor* en un momento intermedio entre el primer y último vencimiento.

El cálculo del valor final requiere fijar una ley de interés, habitualmente, al tratarse de operaciones a más de un año, ésta será la del interés compuesto; el cálculo del valor actual requiere utilizar una ley de descuento, normalmente aplicaremos la del descuento racional compuesto; por último el cálculo del valor en un momento intermedio requiere precisar ambas leyes y emplearemos la del interés y el descuento racional compuesto.

Clasificación de las rentas

Dada la gran aplicación de las rentas a problemas económicos reales se hace preciso su estudio según la clasificación y terminología clásica. Por ello, clasificaremos las rentas en los siguientes grupos:

- Cuando las variables que intervienen en la definición de la renta se suponen conocidas con certeza, se la denomina *renta cierta*, empleando el término *renta aleatoria* cuando alguna de las variables depende del resultado de un fenómeno aleatorio.

Clasificación de las rentas

Dada la gran aplicación de las rentas a problemas económicos reales se hace preciso su estudio según la clasificación y terminología clásica. Por ello, clasificaremos las rentas en los siguientes grupos:

- Cuando las variables que intervienen en la definición de la renta se suponen conocidas con certeza, se la denomina *renta cierta*, empleando el término *renta aleatoria* cuando alguna de las variables depende del resultado de un fenómeno aleatorio.
- Otra clasificación es la que distingue las rentas según la amplitud de sus períodos de maduración.
  Cuando todos los períodos de renta, son de amplitud finita la renta se denomina *discreta* y se da el nombre de *renta continua* a aquellas en las que todos los períodos son infinitesimales.
  Las rentas discretas, también llamadas de *período uniforme*, reciben en particular los nombres de anual, semestral, mensual, bianual, . . . en correspondencia con la medida del período.

Clasificación de las rentas

- Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.

Clasificación de las rentas

- Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.
- Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:
  - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
  - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

Clasificación de las rentas

- Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.
- Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:
  - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
  - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

Clasificación de las rentas

- Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.
- Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:
  - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
  - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

  En las rentas prepagables el origen de la renta coincide con el vencimiento del primer término, mientras que el final de la renta será posterior al último vencimiento y por el contrario, en las rentas pospagables, el origen es anterior al vencimiento del primer capital y, sin embargo, el final coincide con el vencimiento del último término.

Clasificación de las rentas

- Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.
- Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:
  - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
  - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

  En las rentas prepagables el origen de la renta coincide con el vencimiento del primer término, mientras que el final de la renta será posterior al último vencimiento y por el contrario, en las rentas pospagables, el origen es anterior al vencimiento del primer capital y, sin embargo, el final coincide con el vencimiento del último término.

  Un ejemplo de renta prepagable serían los alquileres, que en general se pagan por anticipado. Como ejemplo de pospagable, los sueldos, que suelen cobrarse a período vencido.

Clasificación de las rentas

- Según que la duración de la renta sea finita o infinita, ésta recibirá el calificativo de *renta temporal* o *renta perpetua* respectivamente.

Clasificación de las rentas

- Según que la duración de la renta sea finita o infinita, ésta recibirá el calificativo de *renta temporal* o *renta perpetua* respectivamente.

- La posición del punto α de valoración de la renta, respecto al origen o final de la misma, proporciona otro criterio de clasificación. Así para $\alpha < t_0$, se dice que la renta está *diferida* en $p = t_0 - \alpha$, para $\alpha > t_n$ que está *anticipada* en $h = \alpha - t_n$; y recibe el nombre de renta *inmediata* cuando α coincide con el origen o final de la renta.

Clasificación de las rentas

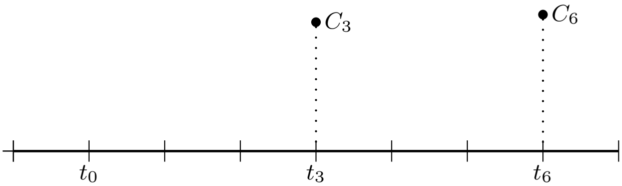
- Según que la duración de la renta sea finita o infinita, ésta recibirá el calificativo de *renta temporal* o *renta perpetua* respectivamente.
- La posición del punto α de valoración de la renta, respecto al origen o final de la misma, proporciona otro criterio de clasificación. Así para $\alpha < t_0$, se dice que la renta está *diferida* en $p = t_0 - \alpha$, para $\alpha > t_n$ que está *anticipada* en $h = \alpha - t_n$; y recibe el nombre de renta *inmediata* cuando α coincide con el origen o final de la renta.
- Finalmente, según el tipo de sistema financiero con el que se valores, se puede hablar de: rentas valoradas en capitalización compuesta, rentas valoradas en capitalización simple, . . .

Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta sería,

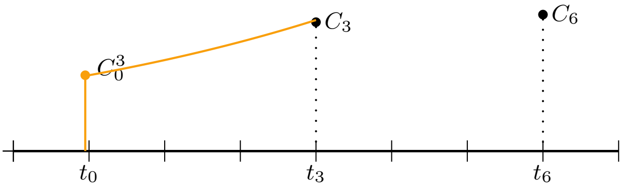


Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta sería,

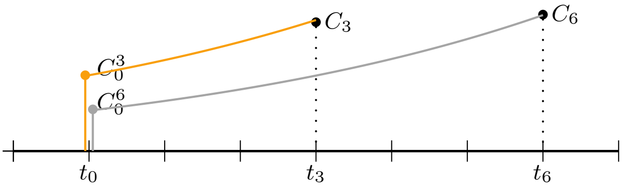


Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta sería,



Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta sería,

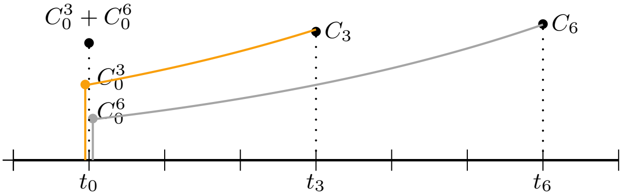


Figura: Valor actual de una renta financiera

Valor capital o financiero de una renta

Además, verifica las propiedades:

- respecto al punto de valoración, las rentas, pueden ser valoradas en cualquier punto.

Valor capital o financiero de una renta

Además, verifica las propiedades:

- respecto al punto de valoración, las rentas, pueden ser valoradas en cualquier punto.
- propiedad asociativa, por la que dos o más rentas pueden ser sustituidas por una única equivalente a las anteriores.

Valor capital o financiero de una renta

Además, verifica las propiedades:

- respecto al punto de valoración, las rentas, pueden ser valoradas en cualquier punto.
- propiedad asociativa, por la que dos o más rentas pueden ser sustituidas por una única equivalente a las anteriores.
- propiedad disociativa, por la que una renta puede ser desdoblada y obtener varias rentas equivalentes a la original.

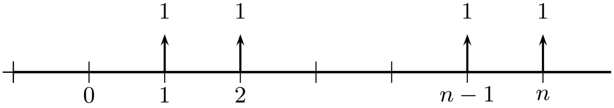
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Estudiaremos inicialmente las rentas constantes inmediatas que clasificaremos según su vencimiento en pospagables y prepagables y dentro de estos en temporales y perpetuas. A este fin, éstas, son las más sencillas con valores financieros de fácil tabulación. Expresaremos las demás en función de las primeras.

Al valor actual de una renta constante temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria), lo designaremos por $a_{\overline{n|}i}$, en el que n expresa su duración en períodos y el subíndice i el tipo de interés periódico a que se evalúa.

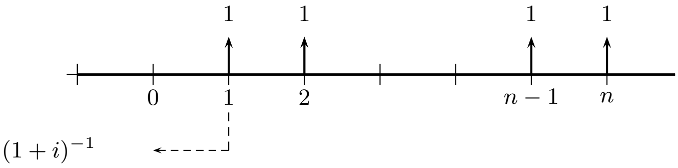
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Gráficamente,

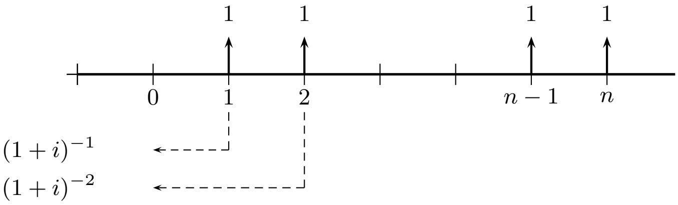


Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Gráficamente,

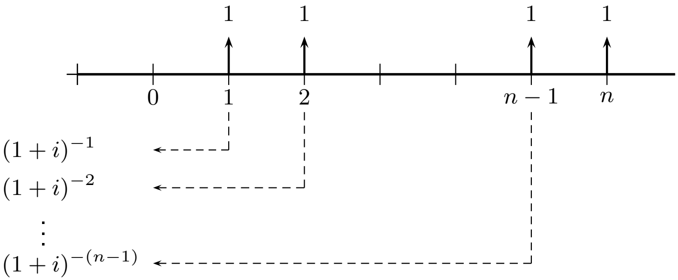


Gráficamente,



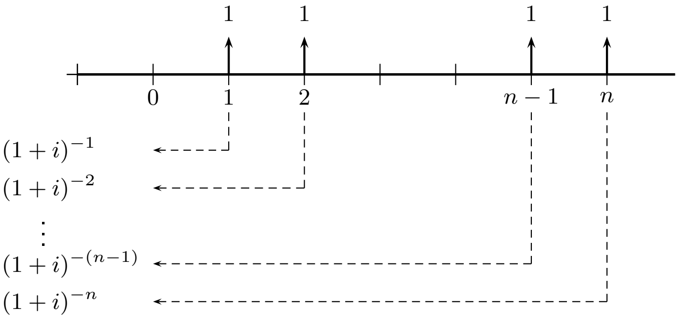
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Gráficamente,



Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Gráficamente,



Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Gráficamente,

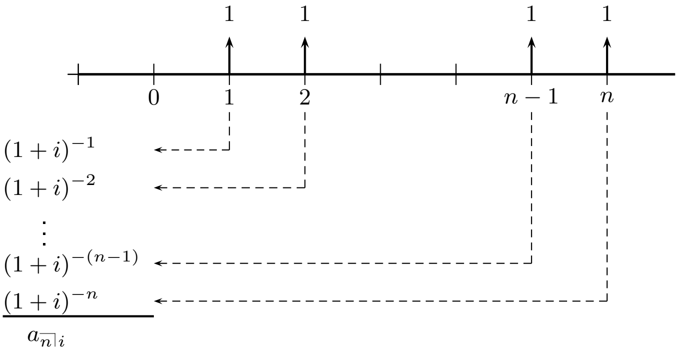


Figura: Valor actual de una renta unitaria

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

El valor actual de esta renta, lo calcularemos aplicando el principio general de equivalencia de capitales en el origen de la misma. Por tanto, recordando la expresión del valor actual de un capital C

$$C_0 = \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$a_{\overline{n|}i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

expresión en la que el segundo término constituye la suma de términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{(1+i)}$, el último $\frac{1}{(1+i)^n}$ y la razón $\frac{1}{(1+i)}$.

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor actual

Aplicando la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica,

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \qquad\qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n}\,\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

multiplicando numerador y denominador por $(1+i)$:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{1 - (1+i)} = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \tag{1}$$

■

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria. Generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C, duración n períodos a interés i, y de acuerdo con (1), será:

$$V_0 = C\, a_{\overline{n|}i} \qquad V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2}$$

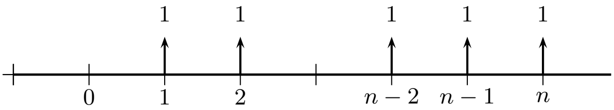
■

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

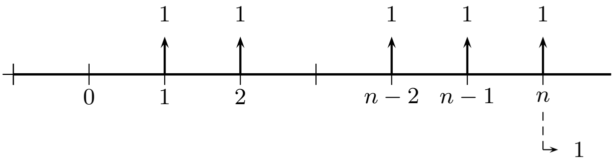
El valor final de una renta constante, temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria) lo designaremos por $s_{\overline{n|}i}$, en el que n e i corresponden a la duración y tipo de interés respectivamente.

Del mismo modo que hemos hecho para el valor actual, la obtención gráfica del valor final, sería:

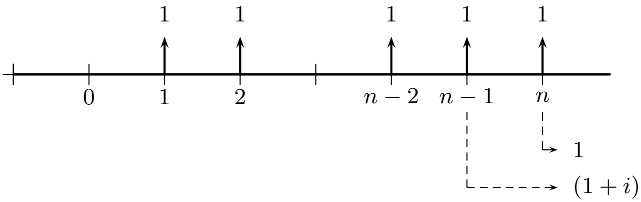
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



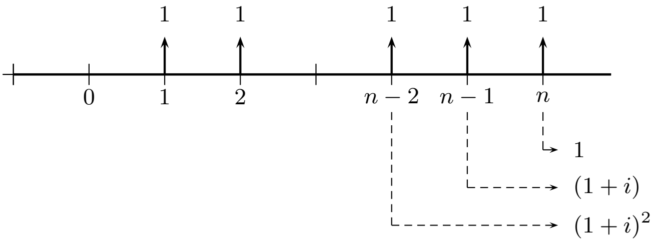
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



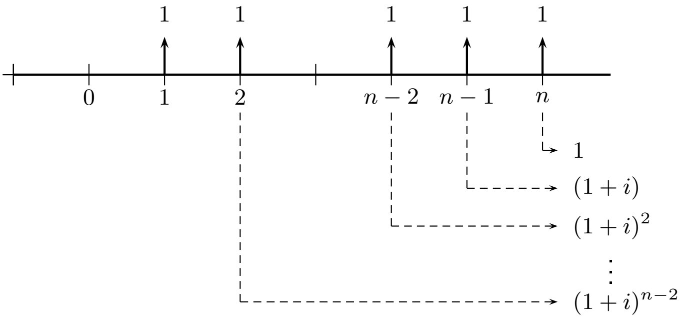
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



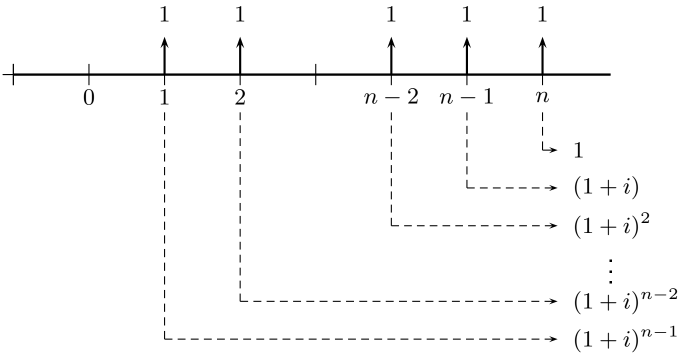
Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

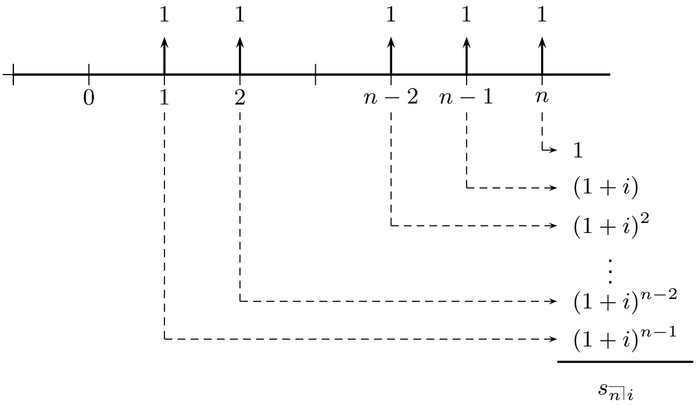


Figura: Valor final de una renta unitaria

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

Igual que para la obtención del valor actual, el valor final, sería:

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^s$$

Nuevamente se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica, esta vez creciente, de razón $(1+i)$ cuya expresión es $S = \dfrac{a_n q - a_1}{q-1}$, y por tanto, resulta:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad (3)$$

■

Relación entre el valor actual y el valor final

Obsérvese que se verifica que capitalizando n períodos el valor actual encontramos el valor final de la renta:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{4}$$

por ser $(1+i)^n$ el factor de capitalización en el intervalo $[0,n]$.
Cuando en lugar de una renta de cuantía unitaria se trate de una renta con términos de cuantía constante C, el valor final será:

$$V_n = C\,s_{\overline{n}|i} \qquad V_n = C\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad V_n = C\,a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{5}$$

■

De la misma forma, podríamos obtener el valor actual, aplicando el descuento racional compuesto al valor final.

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

$$\begin{aligned} V_0 &= (V_0)_{\overline{8}|0,07} = C\, a_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\, a_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\, \frac{1-(1+0,07)^{-8}}{0,07} = 5\,000 \cdot 5,9712985 = 29\,856,49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 &= (V_n)_{\overline{8}|0,07} = C\, s_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\, s_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\, \frac{(1+0,07)^{8}-1}{0,07} = 5\,000 \cdot 10,259803 = 51\,299,01 \end{aligned}$$

También se podría haber obtenido V_8 capitalizando V_0. En efecto,

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

$$\begin{aligned} V_0 &= (V_0)_{\overline{8}|0,07} = C\, a_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\, a_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\, \frac{1-(1+0,07)^{-8}}{0,07} = 5\,000 \cdot 5,9712985 = 29\,856,49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 &= (V_n)_{\overline{8}|0,07} = C\, s_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\, s_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\, \frac{(1+0,07)^{8}-1}{0,07} = 5\,000 \cdot 10,259803 = 51\,299,01 \end{aligned}$$

También se podría haber obtenido V_8 capitalizando V_0. En efecto,

$$V_8 = V_0(1+i)^8 = 29\,856,49\,(1+0,07)^8 = 29\,856,49 \cdot 1,7181862 = 51\,299,01$$

La obtención de los valores de $a_{\overline{8}|0,07}$ y de $s_{\overline{8}|0,07}$ puede obtenerse directamente utilizando tablas financieras, con una calculadora resolviendo las expresiones y por supuesto utilizando una calculadora financiera con la que pueden obtenerse de forma directa.

Renta inmediata, pospagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

$$\begin{aligned} V_0 &= (V_0)_{\overline{8}|0,07} = C\, a_{\overline{8}|0\,,07} = 5\,000\, a_{\overline{8}|0\,,07} \\ &= 5\,000\, \frac{1-(1+0,07)^{-8}}{0,07} = 5\,000 \cdot 5,9712985 = 29\,856,49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 &= (V_n)_{\overline{8}|0,07} = C\, s_{\overline{8}|0\,,07} = 5\,000\, s_{\overline{8}|0\,,07} \\ &= 5\,000\, \frac{(1+0,07)^{8}-1}{0,07} = 5\,000 \cdot 10,259803 = 51\,299,01 \end{aligned}$$

También se podría haber obtenido V_8 capitalizando V_0. En efecto,

$$V_8 = V_0(1+i)^8 = 29\,856,49\,(1+0,07)^8 = 29\,856,49 \cdot 1,7181862 = 51\,299,01$$

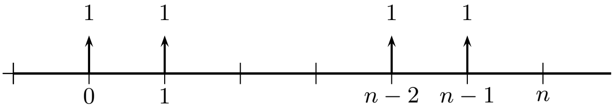
La obtención de los valores de $a_{\overline{8}|0\,,07}$ y de $s_{\overline{8}|0\,,07}$ puede obtenerse directamente utilizando tablas financieras, con una calculadora resolviendo las expresiones y por supuesto utilizando una calculadora financiera con la que pueden obtenerse de forma directa.

Utilizando la calculadora financiera, para obtener V_0,

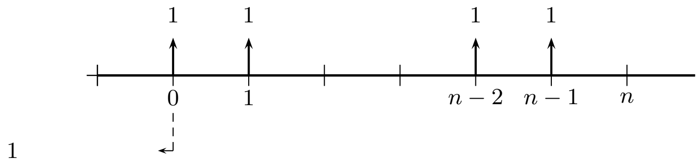
5000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ 8 $\boxed{\text{n}}$ 7 $\boxed{\text{i}}$ $\boxed{\text{PV}}$ obteniendo la respuesta de 29 856,49

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:

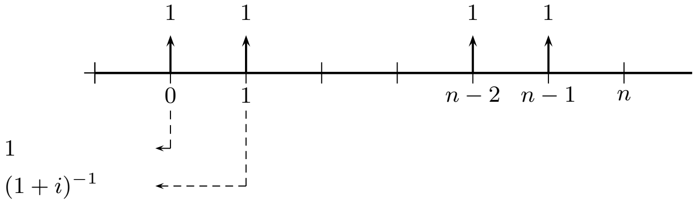


De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:



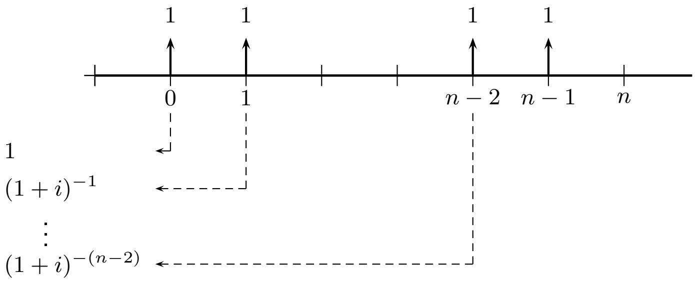
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:



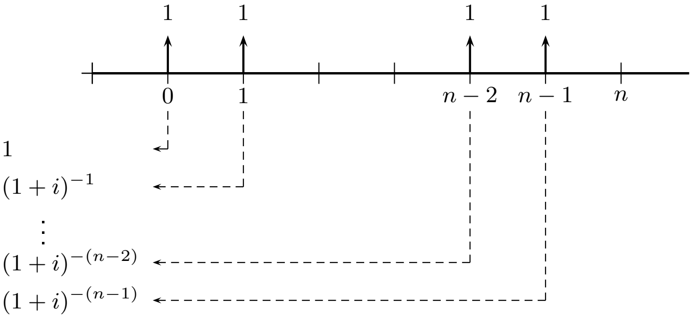
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:



Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:



Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, veremos gráficamente la renta prepagable:

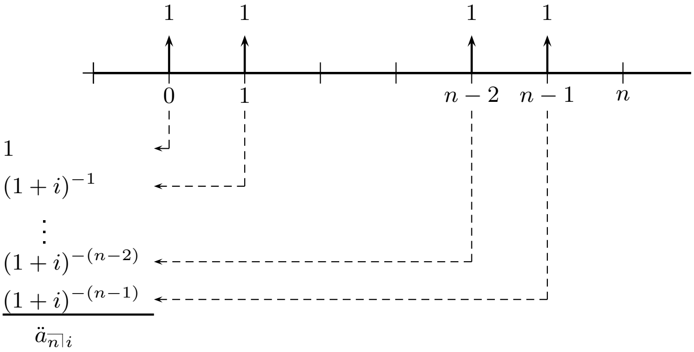


Figura: Valor actual de una renta unitaria prepagable

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor actual

Igual que hicimos en el caso de una renta pospagable, analizaremos en primer lugar la renta prepagable constante de cuantías unitarias, es decir, de término 1, asociado a los períodos $0, 1, 2, \cdots, n$.

Su valor inicial, o en 0, simbolizado por $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$ es,

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s}$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse,

$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) \tag{6}$$

■

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

El valor final o en n, representado por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, es,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^s$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) \tag{7}$$

■

Relación entre el valor actual y el valor final

Se verifica la relación, como ocurría en la renta pospagable:

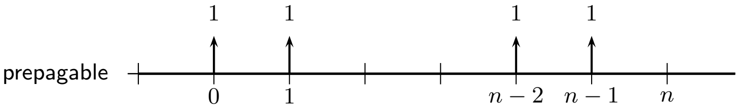
$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = \ddot{a}_{\overline{n|}i} (1+i)^n$$

Puede igualmente observarse, viendo el valor inicial y el valor final de esta renta con sus análogos en el caso de renta pospagable, que mantienen la siguiente relación:

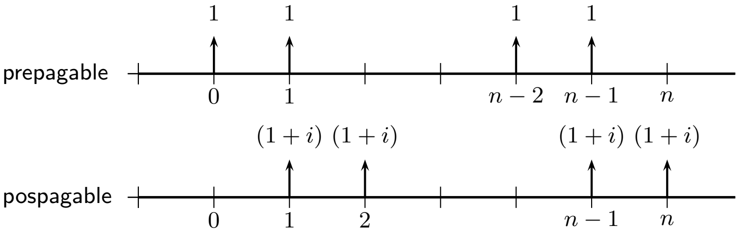
$$\ddot{a}_{\overline{n|}i} = a_{\overline{n|}i} (1+i)$$
$$\ddot{s}_{\overline{n|}i} = s_{\overline{n|}i} (1+i)$$

consecuencia de ser constante el rédito periodal, lo que implica la equivalencia de las rentas prepagable unitaria, con la pospagable de cuantía constante $(1+i)$:

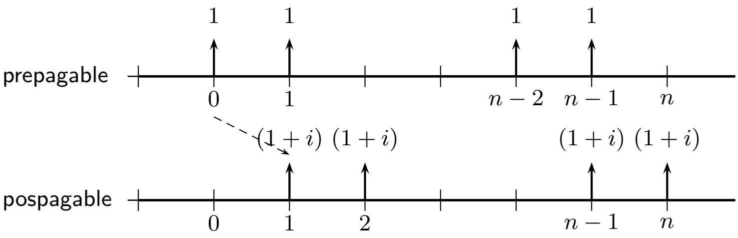
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



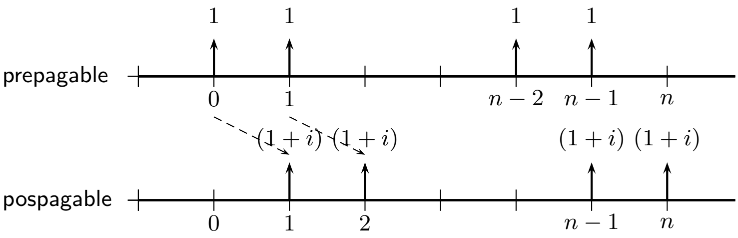
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



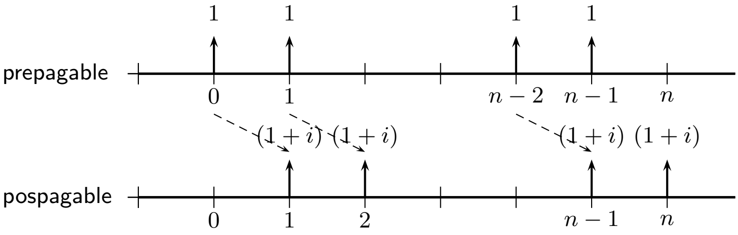
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



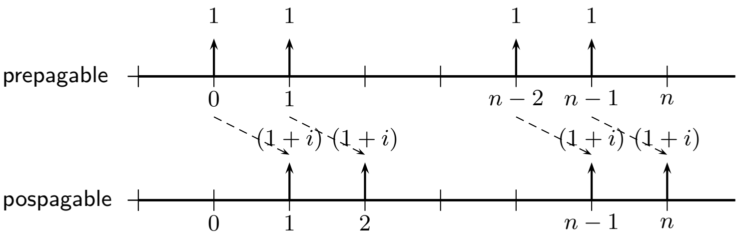
Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final



Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

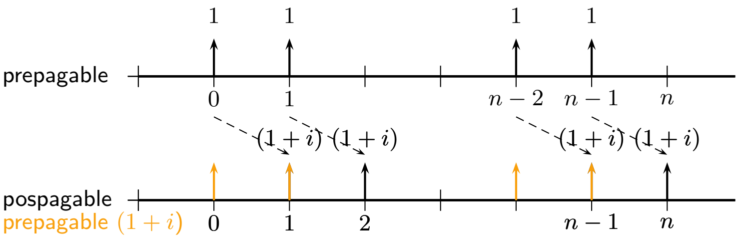


Figura: Relación entre una renta unitaria prepagable y pospagable

Esta relación entre prepagables y pospagables se verificará siempre que el rédito de valoración sea constante para todos los períodos, con independencia de las cuantías de los términos de la renta, ya que trasladar el vencimiento de los términos del extremo inicial de cada período al extremo final equivale a multiplicar las cuantías por $(1+i)$, factor de capitalización del período.

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

Al ser $i > 0$, se verificará siempre $\ddot{a}_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|i} > s_{\overline{n}|i}$

También se obtienen de forma inmediata estas nuevas relaciones entre rentas unitarias prepagables y pospagables,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\overline{n}|i} &= 1 + a_{\overline{n-1}|i} \\ \ddot{s}_{\overline{n}|i} &= s_{\overline{n+1}|i} - 1 \end{aligned}$$

Estas expresiones son propias de las rentas de cuantía constante, lo que permite escribir:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1} (1+i)^{-s} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1} (1+i)^{s} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n-1}|i}$$

y facilita los cálculos con el empleo de tablas, caluladora financiera u hoja de cálculo.

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta de período anual, prepagable de 6 términos y cuantía constante 4 000 € valorada en capitalización compuesta de parámetro $i = 9\,\%$ anual.

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta de período anual, prepagable de 6 términos y cuantía constante 4 000 € valorada en capitalización compuesta de parámetro $i = 9\,\%$ anual.

Su valor inicial puede obtenerse con:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09} = 4\,000\,\ddot{a}_{\overline{6}|0\,,09} = 4\,000\,(1+i)a_{\overline{6}|0\,,09} = 4\,000 \cdot 1,09 \cdot 4,4859185 = 19\,558,61$$

El valor final, puede obtenerse en función del valor inicial:

$$\ddot{V}_n = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09}\,(1+0,09)^6 = 19\,558,61 \cdot 1,6771001 = 32\,801,74$$

Renta inmediata, prepagable y temporal. Valor final

Calcular el valor inicial y final de una renta de período anual, prepagable de 6 términos y cuantía constante 4 000 € valorada en capitalización compuesta de parámetro $i = 9\,\%$ anual.

Su valor inicial puede obtenerse con:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09} = 4\,000\,\ddot{a}_{\overline{6}|0\,,09} = 4\,000\,(1+i)a_{\overline{6}|0\,,09} = 4\,000 \cdot 1,09 \cdot 4,4859185 = 19\,558,61$$

El valor final, puede obtenerse en función del valor inicial:

$$\ddot{V}_n = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09}\,(1+0,09)^6 = 19\,558,61 \cdot 1,6771001 = 32\,801,74$$

Utilizando la calculadora financiera, $\ddot{V}_0$:

[g] [BEG] 6 [n] 9 [i] 4 000 [CHS] [PMT] [PV] obteniendo 19 558,61

El valor de $\ddot{V}_n$, partiendo de los datos anteriores,

0 [PV] [FV] presentado el resultado de 32 801,74

Relación entre el valor actual y final. Pospagable y prepagable

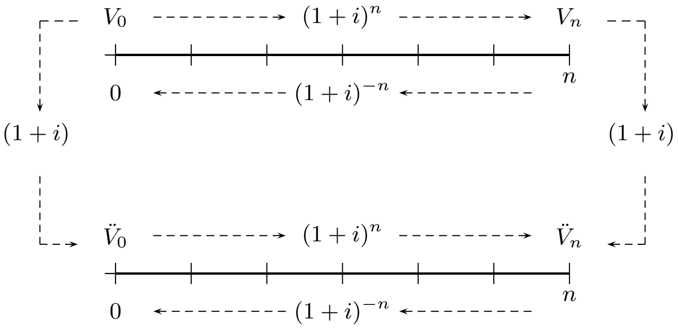


Figura: Relación entre valor actual y final, pospagable y prepagable

Rentas perpetuas. Valor actual

En primer lugar analizaremos el supuesto de renta perpetua pospagable y unitaria. El esquema se corresponde con el del valor actual de una renta pospagable unitaria en el que el tiempo es perpetuo.

Su valor actual o inicial, valorado a rédito constante i, lo representamos por $a_{\overline{\infty}|i}$ y vendrá dado por la suma de una serie geométrica, que es convergente por ser $(1+i)^{-1} < 1$:

$$a_{\overline{\infty}|i} = \sum_{s=1}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \qquad (8)$$

■

Este valor $a_{\overline{\infty}|i}$, se puede interpretar como la cuantía, tal que sus intereses periodales son la unidad ya que:

$$a_{\overline{\infty}|i}\, i = 1$$

Rentas perpetuas. Valor actual

En el caso de que la renta perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será:

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} &= \sum_{s=0}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=0}^{n}(1+i)^{-s} \\
&= \lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = 1+\frac{1}{i}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

■

Entre $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ y $a_{\overline{\infty}|i}$ se verifican, por tanto, las mismas relaciones que entre los valores actuales de las rentas temporales prepagable y pospagable, es decir:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}\,(1+i) \qquad\qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} + 1$$

No tiene sentido hablar de valor final de rentas perpetuas, pues las series que los representan son divergentes. Recuérdese que una renta es convergente cuando la razón de la progresión es $q<1$. En el valor final, $q>1$ ya que $(1+i)>1$ y por tanto, es divergente.

Rentas perpetuas. Valor actual

El valor actual de una renta perpetua de términos de cuantía constante C, será:
En el supuesto de una renta pospagable:

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, a_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{i}$$

y en el de prepagable:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = C\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

Rentas perpetuas. Valor actual

El valor actual de una renta perpetua de términos de cuantía constante C, será:
En el supuesto de una renta pospagable:

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty|}i} = C\, a_{\overline{\infty|}i} = \frac{C}{i}$$

y en el de prepagable:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty|}i} = C\, \ddot{a}_{\overline{\infty|}i} = C\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

Obtener el valor actual de una renta perpetua con términos anuales de cuantía constante $C = 4\,500$ valorada a un tipo de interés del 6 %, tanto en el caso de que fuera pospagable como prepagable.

Rentas perpetuas. Valor actual

El valor actual de una renta perpetua de términos de cuantía constante C, será:
En el supuesto de una renta pospagable:

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, a_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{i}$$

y en el de prepagable:

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = C\left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

Obtener el valor actual de una renta perpetua con términos anuales de cuantía constante $C = 4\,500$ valorada a un tipo de interés del 6 %, tanto en el caso de que fuera pospagable como prepagable.

En la opción de términos pospagables,

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|0,06} = C\, a_{\overline{\infty}|0,06} = 4\,500\,\frac{1}{0,06} = 75\,000$$

Si se trata de prepagable,

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|0,06} = C\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|0,06} = 4\,500\,\frac{1+0,06}{0,06} = 79\,500$$

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Las rentas se dicen diferidas cuando el momento de valoración α es anterior al origen de la renta.

Si suponemos que el diferimiento coincide con un número entero p de períodos de rédito constante i, para cada uno de los diversos tipos de rentas unitarias tratadas anteriormente, se obtienen los siguientes resultados:

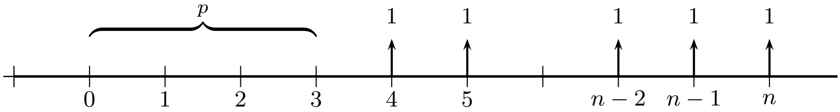
El valor actual, representado por ${}_p/a_{\overline{n|}i}$ es,

$$ {}_p/a_{\overline{n|}i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p} \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = (1+i)^{-p} a_{\overline{n|}i} \tag{10} $$

■

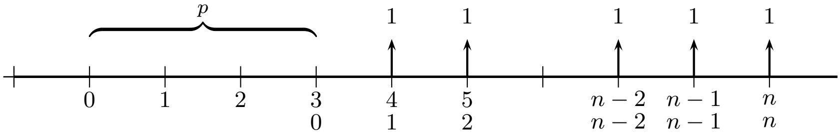
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



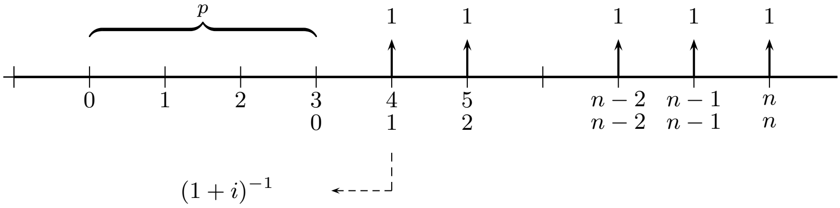
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



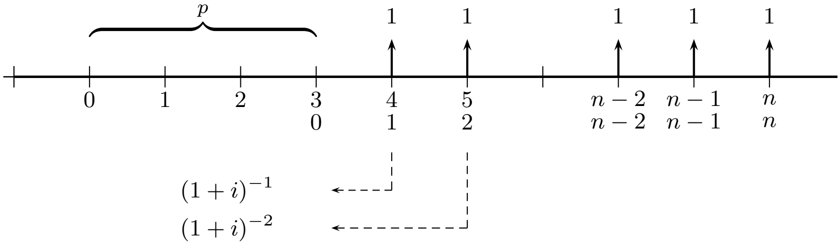
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



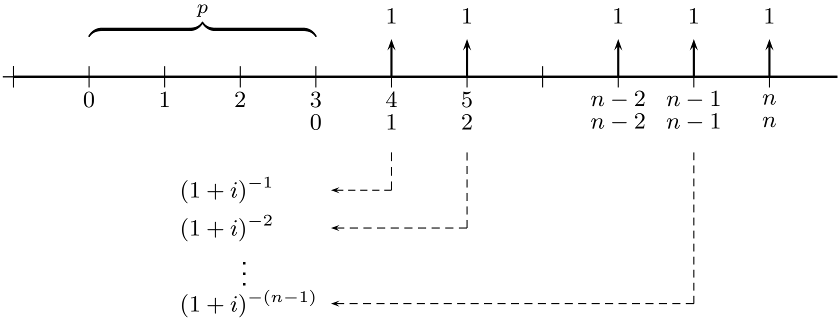
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



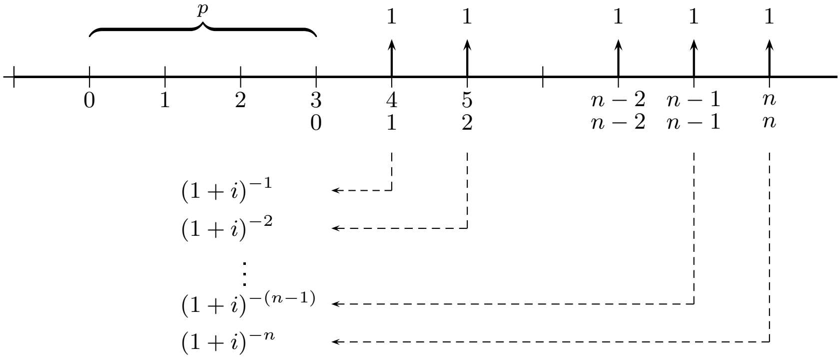
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



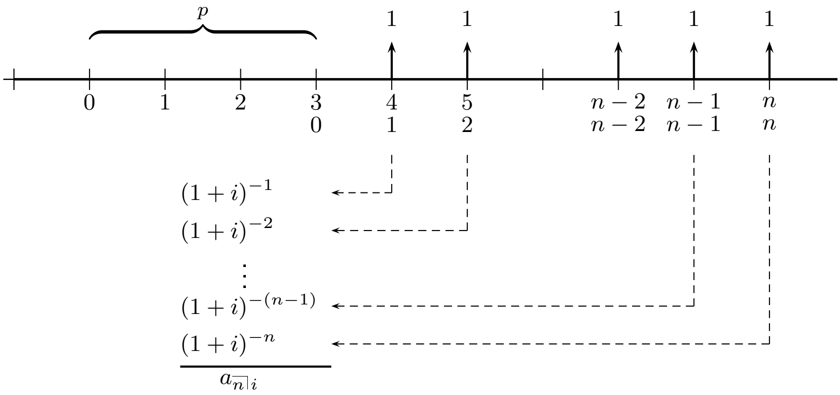
Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:



Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Gráficamente:

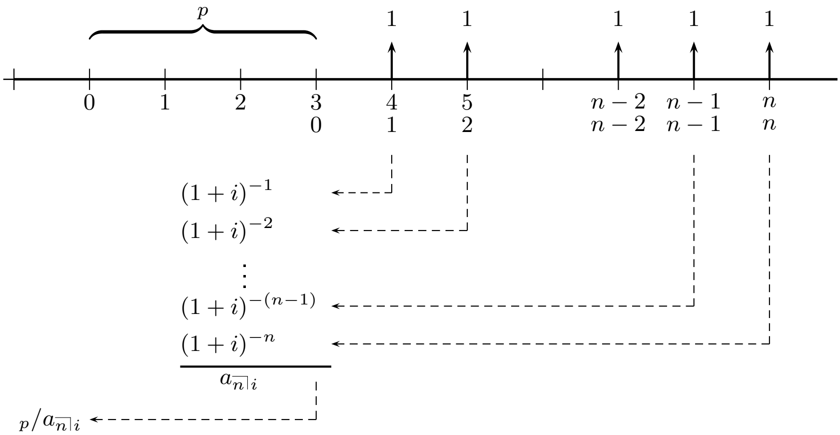


Figura: Valor actual de una renta unitaria diferida

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

A efectos operativos es interesante expresar la renta diferida como la diferencia de dos rentas inmediatas:

$$_{p/}a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-(p+s)} = \sum_{s=1}^{n+p}(1+i)^{-s} - \sum_{s=1}^{p}(1+i)^{-s}$$

de la que se obtiene:

$$_{p/}a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i} \qquad o \qquad _{p/}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i}$$

Si se trata del valor actual prepagable, su valor actual, será:

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p}\sum_{s=0)}^{n-1}(1+i)^{-s} = (1+i)^{-p}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \tag{11}$$

■

que también podemos expresar como:

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{p+n}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i} \qquad o \qquad _{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

En el supuesto de que la renta sea perpetua en lugar de temporal, el valor actual, se obtendría:

$$_{p/}a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_{p/}a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}(1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p}\,\frac{1}{i} \tag{12}$$

■

que también podrá obtenerse como:

$$_{p/}a_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} - a_{\overline{p}|i}$$

Si la renta diferida es prepagable y perpetua:

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p+1}\,\frac{1}{i}$$

y también,

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i}$$

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Si las rentas no son unitarias, sino de cuantía C,

$$ {}_{p/}(V_0)_{\overline{n}|i} = C\,{}_{p/}a_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_{p/}(V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,{}_{p/}a_{\overline{\infty}|i} $$

si es prepagable,

$$ {}_{p/}(\ddot{V}_0)_{\overline{n}|i} = C\,{}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_{p/}(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,{}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} $$

Al valor final de una renta diferida en p períodos no le afecta el diferimiento ya que,

$$ {}_{p/}s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}\,{}_{p/}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}(1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n}a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} $$

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Calcular el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual constante de 2 000 € diferida 3 años y de 4 de duración, si la valoración se hace a un tipo de interés del 6 %

Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Calcular el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual constante de 2 000 € diferida 3 años y de 4 de duración, si la valoración se hace a un tipo de interés del 6 %

$$_3/(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0{,}06} = 2\,000 \cdot 3{,}673012 \cdot 0{,}839619 = 6\,167{,}86$$

o como diferencia de rentas siendo,

$$_3/\ddot{a}_{\overline{4}|0\,,06} = \ddot{a}_{\overline{7}|0\,,06} - \ddot{a}_{\overline{3}|0\,,06} = 3{,}083932$$

$$_3/(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0{,}06} = 2\,000 \cdot 3{,}083932 = 6\,167{,}86$$

Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante

En este caso, se trata de rentas valoradas en un momento α que se encuentra h períodos posterior al final de la renta.

Si se trata de una renta anticipada y pospagable, el valor de la renta en $\alpha = t_{n+h}$, representado por $_{h/}s_{\overline{n}|i}$ viene dado por la expresión:

$$_{h/}s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^s = (1+i)^h s_{\overline{n}|i} \tag{13}$$

■

Si se trata de una renta prepagable y anticipada, y que tiene como valor en $\alpha = t_{n+h}$:

$$_{h/}\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=1}^{n}(1+i)^s = (1+i)^h \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{h+1} s_{\overline{n}|i} \tag{14}$$

■

Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante

Determinar el valor al final de nueve años de una renta pagadera por años vencidos, de cuantía anual constante de 30 000 € de siete términos, sabiendo que el rédito anual es del 6 %

Rentas anticipadas en h períodos de rédito constante

Determinar el valor al final de nueve años de una renta pagadera por años vencidos, de cuantía anual constante de 30 000 € de siete términos, sabiendo que el rédito anual es del 6 %

$$_{2}/(V_n)_{\overline{7}|0,06} = 30\,000\,(1+0,06)^2 s_{\overline{7}|0,06} = 282\,939,48$$

$$V_0 = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Relación entre el valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

$$(1+i)$$

prepagable

$$V_0 = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Relación entre el valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

$(1+i)$

prepagable

$$V_0 = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

diferida $(1+i)^{-p}$

Relación entre el valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

$(1+i)$

prepagable

$$V_0 = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

diferida $(1+i)^{-p}$

$(1+i)^n$

valor final

Relación entre el valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

$(1+i)$

prepagable

$\uparrow$

$$V_0 = C\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \dashrightarrow \text{diferida } (1+i)^{-p}$$

$\downarrow$

$(1+i)^n$

valor final

$\downarrow$

$(1+i)^h$

anticipada

Relación entre el valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

$$\begin{array}{c} (1+i) \\ \text{prepagable} \\ \uparrow \end{array}$$

$$V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \dashrightarrow \text{diferida } (1+i)^{-p}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (1+i)^n \\ \text{valor final} \\ \downarrow \\ (1+i)^h \\ \text{anticipada} \end{array}$$

Figura: Relación entre valor actual pospagable y prepagable. Valor final y rentas diferidas o anticipadas

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

La utilización generalizada de las rentas unitarias hace conveniente su estudio analítico de los valores financieros principalmente inicial y final como función de sus variables básicas n e i.

Estudio del valor actual como función de n

La variable n se refiere al número de términos de la renta y por tanto, pertenece a los números naturales, $n \in \mathbb{N}$.

La función de n, que representa $a_{\overline{n}|i}$, es,

$$\varphi_1(n) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Esta función es creciente cuanto mayor sea el número de términos. Para $n = 0$ toma el valor $\varphi_1(0) = 0$, y está acotada por:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1(n) = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Si ampliamos la función al campo real positivo haciendo $n = x$ y $x \in \mathbb{R}$, viendo la primera y segunda derivada podríamos decir que la función es creciente y cóncava tal como se muestra en el gráfico.

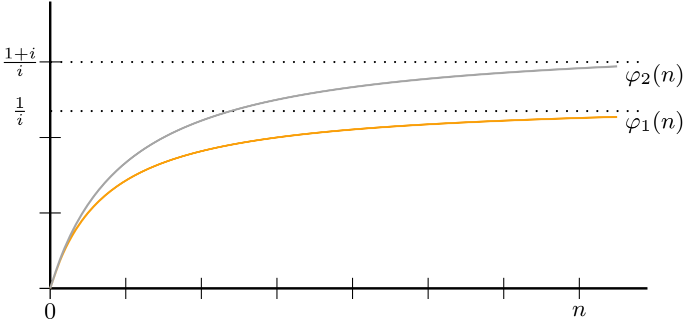


Figura: Estudio de n

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Determinar el número de años de una renta cuyo valor actual es de 45 032 €, sus términos pospagables de 4 000 € y el tipo de interés del 8 %

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Determinar el número de años de una renta cuyo valor actual es de 45 032 €, sus términos pospagables de 4 000 € y el tipo de interés del 8 %

$$45\,032 = 4\,000\, a_{\overline{n}\rceil 0,08} \qquad \frac{45\,032}{4\,000} = \frac{1-(1+0,08)^{-n}}{0,08}$$

$$0,900640 = 1 - \frac{1}{1,08^n} \qquad \frac{1}{1,08^n} = 1 - 0,900640$$

$$1,08^n = \frac{1}{0,099360} \qquad n \, \log 1,08 = \log 10,064412 \qquad n = 30$$

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Estudio del valor actual como función de i

La determinación del valor de n, se haría a través de las tablas financieras, interpolando en su caso, por tanteos o tomando logaritmos.

El valor actual de una renta unitaria pospagable, es,

$$\varphi_1(i) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Obteniendo la primera y segunda derivada,

$$\varphi_1'(i) = \sum_{s=1}^{n}(-s)(1+i)^{-(s+1)} < 0 \rightarrow \varphi_1(i) \text{ decreciente}$$

$$\varphi_1''(i) = \sum_{s=1}^{n}s(s+1)(1+i)^{-(s+2)} > 0 \rightarrow \varphi_1(i) \text{ convexa}$$

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

los valores de $\varphi_1(i)$ en los extremos, son:

$$\varphi_1(0) = n \qquad \text{y} \qquad \lim_{i \to x} \varphi_1(i) = 0$$

Resumiendo, $\varphi_1(i)$ es decreciente y convexa, corta al eje de ordenadas y en el punto $(0, n)$ y tiene como asíntota el eje positivo de x (abcisas).

Si se trata de una renta prepagable, operando de la misma forma, veríamos que se trata igualmente de una función decreciente y convexa en la que la asíntota, sería:

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_2(i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s} = 1$$

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Su representación gráfica, sería:

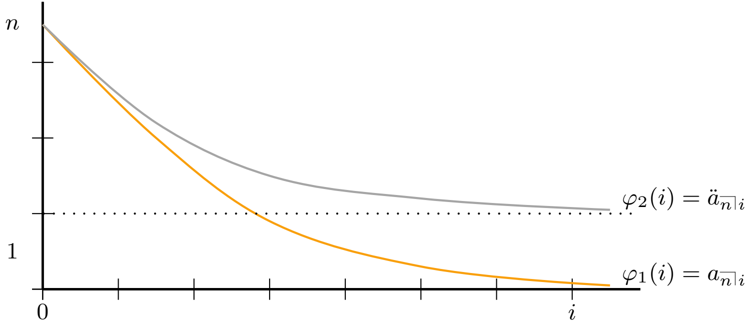


Figura: Estudio de i

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

La obtención del valor de i, se haría utilizando un método de tanteo o mediante una aproximación de Taylor que nos permita obtener un valor inicial suficientemente aproximado. Tambien, con el empleo de las tablas financieras e interpolando.
Para la determinación de un valor inicial de i como primera aproximación, podemos emplear un desarrollo de Taylor. Ésta, será válida cuanto menor sea el valor de i. Partiendo de la ecuación general,

$$V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Desarrollando en serie $(1+i)^{-n}$ los dos primeros términos por Taylor,

$$(1+i)^{-n} \approx 1 - n\,i + \frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2$$

$$V_0 = C\,\frac{1-\left(1-n\,i+\frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2\right)}{i} \qquad V_0 = C\,\frac{n\,i-\frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2}{i}$$

Dividiendo por i,

$$V_0 = C\left(n - \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\right) \qquad\qquad V_0 = C\,n - \frac{C\,n\,(n+1)}{2}\,i$$

Factorizando el denominador y dividiendo entre n, obtenemos una aproximación o fórmula heurística de i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{C - \dfrac{V_0}{n}}{\dfrac{V_0}{n} + V_0} \tag{15}$$

Dividiendo por i,

$$V_0 = C\left(n - \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\right) \qquad\qquad V_0 = C\,n - \frac{C\,n\,(n+1)}{2}\,i$$

Factorizando el denominador y dividiendo entre n, obtenemos una aproximación o fórmula heurística de i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{C - \dfrac{V_0}{n}}{\dfrac{V_0}{n} + V_0} \tag{15}$$

Al adquirir un vehículo por 24 000 € nos proponen pagar durante 6 años una renta de 5 390 € anuales. ¿A qué tipo de interés se ha realizado la operación?

Dividiendo por i,

$$V_0 = C\left(n - \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\right) \qquad\qquad V_0 = C\,n - \frac{C\,n\,(n+1)}{2}\,i$$

Factorizando el denominador y dividiendo entre n, obtenemos una aproximación o fórmula heurística de i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{C - \dfrac{V_0}{n}}{\dfrac{V_0}{n} + V_0} \tag{15}$$

Al adquirir un vehículo por 24 000 € nos proponen pagar durante 6 años una renta de 5 390 € anuales. ¿A qué tipo de interés se ha realizado la operación?

$$24\,000 = 5\,390\,a_{\overline{6|}i}$$

$$a_{\overline{6|}i} = \frac{24\,000}{5\,390} = 4,452690$$

Dividiendo por i,

$$V_0 = C\left(n - \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\right) \qquad V_0 = C\,n - \frac{C\,n\,(n+1)}{2}\,i$$

Factorizando el denominador y dividiendo entre n, obtenemos una aproximación o fórmula heurística de i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{C - \dfrac{V_0}{n}}{\dfrac{V_0}{n} + V_0} \tag{15}$$

Al adquirir un vehículo por 24 000 € nos proponen pagar durante 6 años una renta de 5 390 € anuales. ¿A qué tipo de interés se ha realizado la operación?

$$24\,000 = 5\,390\,a_{\overline{6}|i}$$

$$a_{\overline{6}|i} = \frac{24\,000}{5\,390} = 4,452690$$

Si utilizamos el método heurístico (15) para el cálculo del primer valor i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{5\,390 - \dfrac{24\,000}{6}}{\dfrac{24\,000}{6} + 24\,000} \qquad\qquad i_0 = 0,099286 \approx 9,929\,\%$$

que es un valor aproximado al real. Podemos utilizarlo como primer valor o valor estimado de i.

Si utilizamos el método heurístico (15) para el cálculo del primer valor i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{5\,390 - \dfrac{24\,000}{6}}{\dfrac{24\,000}{6} + 24\,000} \qquad\qquad i_0 = 0,099286 \approx 9,929\,\%$$

que es un valor aproximado al real. Podemos utilizarlo como primer valor o valor estimado de i.

Por interpolación, si buscamos los valores en las tablas, obtenemos,

$$a_{\overline{6}|0\,,09} = 4,485919 \qquad\qquad a_{\overline{6}|0\,,10} = 4,355261$$

e interpolando,

$$\frac{4,452690 - 4,485919}{4,355261 - 4,485919} = \frac{x - 0,09}{0,1 - 0,09}$$
$$\frac{0,033229}{0,130658} = \frac{x - 0,09}{0,01}$$
$$x = 0,092543 = 9,25\,\%$$

Si utilizamos el método heurístico (15) para el cálculo del primer valor i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{5\,390 - \dfrac{24\,000}{6}}{\dfrac{24\,000}{6} + 24\,000} \qquad\qquad i_0 = 0,099286 \approx 9,929\,\%$$

que es un valor aproximado al real. Podemos utilizarlo como primer valor o valor estimado de i.

Por interpolación, si buscamos los valores en las tablas, obtenemos,

$$a_{\overline{6}|0,09} = 4,485919 \qquad\qquad a_{\overline{6}|0,10} = 4,355261$$

e interpolando,

$$\frac{4,452690 - 4,485919}{4,355261 - 4,485919} = \frac{x - 0,09}{0,1 - 0,09}$$

$$\frac{0,033229}{0,130658} = \frac{x - 0,09}{0,01}$$

$$x = 0,092543 = 9,25\,\%$$

Con la calculadora, el cálculo de i,

6 $\boxed{\text{n}}$ 24000 $\boxed{\text{PV}}$ 5390 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ $\boxed{\text{i}}$ obteniendo 9,250 %

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Video Web: Rentas financieras

Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

Video Local: Rentas financieras

Gracias por su atención