A

Introducción matemática

Como anexo al estudio de las operaciones financieras, se exponen aquí aquellos conceptos y operaciones matemáticas precisos para las distintas unidades.

Este estudio, no pretende ser exhaustivo, sino orientativo para el análisis de las matemáticas financieras.

A.1. Razones y proporciones

A.1.1. Razones

Se llama razón de dos números al cociente del primero por el segundo. La razón de dos números a y b se escribe en forma de fracción $\frac{a}{b}$, donde el primer número a o numerador (*antecedente*) y el segundo o denominador b (*consecuente*).

Ejemplo A.1 La razón de 5 a 7, es, $\frac{5}{7}$

Propiedades de las razones,

1. Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$:
    a) Si $b = d$, la mayor fracción es la que tiene mayor numerador,
    b) Si $a = c$, la mayor fracción es la que tiene menor denominador,
    c) Si se multiplica o divide el numerador de una fracción por un número, la fracción queda multiplicada o dividida por el mismo número.
    d) Si se multiplica o divide el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número la fracción no varía.

Se llama *número mixto* a un número compuesto de entero y fracción. Para convertirlo en fracción, se toma por numerador el resultado de multiplicar el denominador por la parte entera y sumarle el numerador, tomando como denominador el denominador de la fracción.

Ejemplo A.2 Dado el número mixto $4\,\frac{2}{5}$, determinar la fracción,

$$\frac{4\cdot 5+2}{5}=\frac{22}{5}$$

Operaciones

Para reducir las fracciones, lo haremos al mínimo común denominador, y para ello seguiremos los pasos siguientes,

1. Se simplifican a su más simple expresión,
2. Se calcula el mínimo común múltiplo (*mcm*) de los denominadores. Para ello, se descomponen en sus factores primos. El *mcm* será el producto de todos los factores de los números dados afectados del mayor exponente,
3. Se divide el *mcm* por el denominador de cada fracción multiplicando ambos términos por el cociente obtenido.

Ejemplo A.3 Reducir al mínimo común denominador las fracciones siguientes, $\frac{5}{12}, \frac{7}{50}, \frac{9}{24}$ y $\frac{11}{30}$
El denominador común, será el *mcm* de 12, 24, 30 y 50.

$$\left.\begin{array}{l} 12=2^2\cdot 3 \\ 24=2^3\cdot 3 \\ 30=2\cdot 3\cdot 5 \\ 50=2\cdot 5^2 \end{array}\right\} mcm=2^3\cdot 3\cdot 5^2=600 \qquad \frac{600}{12}=50;\frac{600}{24}=25;\frac{600}{30}=20;\frac{600}{50}=12$$

la fracción, quedará reducida así,

$$\frac{5\cdot 50}{12\cdot 50}=\frac{250}{600};\ \frac{7\cdot 12}{50\cdot 12}=\frac{84}{600};\ \frac{9\cdot 25}{24\cdot 25}=\frac{225}{600};\ \frac{11\cdot 20}{30\cdot 20}=\frac{220}{600}$$

1. *La suma de fracciones con igual denominador*, es otra fracción que tiene el mismo denominador y el numerador es la suma de los numeradores,

$$\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}=\frac{a_1+a_2+a_3}{b}$$

2. *La suma de fracciones con distinto denominador*, se convierte en el caso anterior al obtener previamente el *mcm*.
3. En la *suma de números mixtos*, se suman por un lado las partes enteras y por otro las fracciones del siguiente modo,

$$A_1\frac{a_1}{b_1}+A_2\frac{a_2}{b_2}=A\frac{a}{b},\ \text{siendo}$$

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a}{b};\ \text{y}\ A_1+A_2=A$$

4. En *la resta de fracciones* es válido todo lo dicho anteriormente para la suma. Se sustituye el signo más $+$ por el signo menos $-$.

5. *La multiplicación de un entero por una fracción* es el producto del entero por el numerador como nuevo numerador siendo el denominador el mismo,

$$A\frac{a}{b} = \frac{A \cdot a}{b}$$

6. *La multiplicación de fracciones* es la multiplicación de los numeradores y los denominadores tomando los resultados obtenidos como numerador y denominador respectivamente la fracción producto,

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3}$$

7. *La división de un número entero por una fracción* es la multiplicación del número entero por el denominador de la fracción como numerador y el denominador el mismo,

$$A : \frac{a}{b} = \frac{A \cdot b}{a}$$

8. *La división de dos fracciones* es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda como numerador de la nueva fracción y el producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda como denominador de la nueva fracción,

$$\frac{a_1}{b_1} : \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 \cdot b_2}{b_1 \cdot a_2}$$

A.1.2. Proporciones

Se llama proporción a la igualdad de dos razones. Si representamos por $\frac{a}{b}$ una razón y por $\frac{c}{d}$ otra, estas dos razones formarán una proporción, cuando,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

en la que a los términos a y d se les llama extremos, y a los términos b y c medios.

A.2. Porcentajes

Se define el tanto por cuanto de una cantidad, como otra cantidad que guarda con la primera la misma relación que el tanto con el cuanto.

Así decimos el 3 por 75, el 2 por 80, el 3 por 100, el 1,5 por 1 000, etc. Los más usados son el tanto por ciento (3 %) y el tanto por mil (1,5 ‰).

Para hallar el tanto por cuanto de una cantidad, se la multiplica por el tanto y se la divide por el cuanto. ■

Ejemplo A.4 El 3 por 75 de 1 500, es, $\frac{1\,500 \cdot 3}{75} = 60$

A.3. Logaritmos decimales

Se llama logaritmo decimal de un número, al exponente a que debe elevarse la base, que en los logaritmos decimales es 10, para obtener una potencia igual al número dado.

Ejemplo A.5 $1\,000 = 10^3$, por tanto, 3 es el logaritmo decimal de 1 000 que se expresa en la forma *log* $1\,000 = 3$

1. Propiedades de los logaritmos

   a) En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1 y el logaritmo de la unidad es 0.

   b) Los logaritmos de los números mayores que la unidad son positivos, y al crecer indefinidamente el número, crece también indefinidamente su logaritmo.

   c) Los logaritmos de los números positivos menores que la unidad, son negativos, y al aproximarse el número a cero, se aproxima su logaritmo a $-\infty$.

   d) Los números negativos carecen de logaritmo real, se dice que tienen logaritmo imaginario.

2. Logaritmo de un producto

   El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

   $$\log a \cdot b \cdot c = \log a + \log b + \log c$$

3. Logaritmo de un cociente

   El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

   $$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

4. Logaritmo de una potencia

   El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia.

   $$\log a^n = n\ \log a$$

5. Logaritmo de una raíz

   El logaritmo de la raíz de un número se obtiene dividiendo el logaritmo del radicando por el índice de la raíz.

   $$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

   e igualmente, convirtiéndolo en una potencia,

   $$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = n\ \log a$$

6. Definición de característica y mantisa

   La parte entera de un logaritmo se llama característica y la parte decimal, mantisa.

   Ejemplo A.6 $\log 640 = 2,80618$; la característica es 2 y la mantisa 0,80618

A.4. Interpolación lineal

La interpolación lineal es un caso particular de la interpolación general de Newton.

Con el polinomio de interpolación de Newton se logra aproximar un valor de la función $f(x)$ para un valor desconocido de x. Un caso particular, para que una interpolación sea lineal es en el que se utiliza un polinomio de interpolación de grado uno.

Para el cálculo de la variable i a partir de la expresión correspondiente al valor actual (o final) de una renta,

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i}$$

en donde, $a_{\overline{n}|i}$, (véase 5.1 en la página 58) es,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

y puesto que no es posible obtener de forma explícita el valor de i, podemos utilizar la interpolación lineal como aproximación.

Por las tablas financieras sabemos que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ y queremos conocer x para un valor de $y = f(x)$, siendo $x_1 < x < x_2$.

La interpolación lineal consiste en trazar una recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y calcular los valores intermedios según esta recta en lugar de la función $y = f(x)$.

$$\frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)} = \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \tag{A.1}$$

despejando x,

$$x = \frac{(y-y_1)}{(y_2-y_1)}(x_2-x_1)+x_1 \tag{A.2}$$

expresión que permite obtener el valor aproximado de x. ■

Ejemplo A.7 Dado el valor de $a_{\overline{10}|0,05} = 7,721735$ y el correspondiente a $a_{\overline{10}|0,06} = 7,360087$, obtener el tipo i al que corresponde un valor de $a_{\overline{10}|i} = 7,448054$.

En este caso, aplicando la interpolación lineal,

$$\frac{7,448054-7,721735}{7,360087-7,721735} = \frac{x-0,05}{0,06-0,05}$$

en la que despejando x, utilizando (A.2), obtenemos,

$$x = 0,05756761$$

valor aproximado al real de $x = 0,05750042$

A.5. Progresiones aritméticas

Se entiende por progresión, un conjunto de números que aparecen ordenados y que generalmente se obtienen unos de otros en virtud de una ley constante.

Progresión aritmética, es una sucesión, limitada o ilimitada de números, tales que cada uno es igual al anterior variando en una cantidad constante llamada *razón* o diferencia de la progresión.

Si la diferencia o razón es positiva, los términos van aumentando y se llama progresión creciente; si la diferencia es negativa, los términos van disminuyendo y la progresión se dice que es decreciente.

De la definición se deduce que si la sucesión,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

es una progresión artimética de razón d y se verifica,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + d = a_1 + (n-2)d \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

En las progresiones aritméticas, un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la razón como términos le preceden. En general,

$$a_n = a_1 + (n-1)d \tag{A.3}$$

■

Ejemplo A.8 Dada la progresión aritmética $5, 7, 9, \cdots$ calcular el término vigésimo.

La razón de la progresión, será $d = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$,

$$a_{20} = 5 + (20-1)\,2 = 43$$

A.5.1. Suma de términos equidistantes de los extremos

La suma de dos términos equidistantes de los extremos, es constante e igual a la suma de éstos últimos.

Dos términos equidistan de los extremos de una progresión, cuando a uno de ellos le preceden tantos términos como siguen al otro.

Ejemplo A.9 Dada la progresión aritmética $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$,

La suma de los extremos, es $4 + 25 = 29$, y la de los términos equidistantes también, pues $7 + 22 = 29$, $10 + 19 = 29$

A.5.2. Término medio

Cuando el número de términos de la progresión es impar, existe un término a_{p+1}, el término medio, que es equidistante de si mismo y cumple que,

$$a_{p+1} = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

El término medio es igual a la semisuma de los extremos.

A.5.3. Suma de los términos de una progresión aritmética limitada

Dada la progresión aritmética,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$$

representando por S la suma de todos los términos de la misma, tendremos,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \tag{A.4}$$

o bien,

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1 \tag{A.5}$$

sumando ordenadamente (A.4) y (A.5) resulta,

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Cada uno de estos pares es suma de términos equidistantes de los extremos, luego todos ellos son iguales a la suma $a_1 + a_n$ de los extremos, o sea,

$$2S = (a_1 + a_n)n, \qquad \text{de donde,} \qquad S = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los extremos multiplicada por el número de términos.

Ejemplo A.10 Hallar la suma de los términos de la progresión 1, 6, 11, 16, ..., compuesta por 51 términos.

La razón, es, $a_2 - a_1 = 6 - 1 = 5$. El último término, será, $a_{51} = 1 + (51 - 1)\,5 = 251$

La suma, será, $S = \dfrac{1 + 251}{2}\,51 = 6\,426$

A.6. Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión limitada o ilimitada de términos, tales, que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por un número constante llamado razón de la progresión.

Cuando el primer término es positivo y la razón mayor que la unidad, cada término es mayor que el anterior y la progresión se llama creciente.

Si la razón es menor que la unidad, pero positiva, cada término es menor que el anterior, y la progresión se llama decreciente.

Dada la progresión geométrica,

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n$$

por definición, el segundo término a_2 es igual al primero a_1 multiplicado por la razón q, por tanto,

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-2} \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

en toda progresión geométrica, un término cualquiera es igual al primero multiplicado por la razón elevada al número de términos que le preceden. En general,

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \tag{A.6}$$

■

Ejemplo A.11 Dada la progresión geométrica 8, 16, 32, ..., calcular el séptimo término.

La razón, será,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{16}{8} = 2$$

y

$$a_7 = 8 \cdot 2^6 = 512$$

A.6.1. Producto de dos términos equidistantes de los extremos

En toda progresión geométrica, el producto de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de estos extremos.

Ejemplo A.12 Dada la progresión geométrica $2,4,8,16,32,64$, el producto de los extremos, es $2 \cdot 64 = 128$, y el de los términos equidistantes, es $4 \cdot 32 = 128$ y $8 \cdot 16 = 128$.

A.6.2. Término medio

Cuando la progresión geométrica limitada tiene un número impar de términos, hay uno, que equidista consigo mismo de los extremos y cumple que,

$$h^2 = a_1 \cdot a_n$$

de donde,

$$h = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$

El término medio es igual a la raíz cuadrada del producto de los extremos.

A.6.3. Producto de los términos de una progresión geométrica limitada

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n_1}, a_n$ si llamamos P al producto de sus n primeros términos,

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \tag{A.7}$$

o bien,

$$P = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \tag{A.8}$$

Multiplicando estas dos expresiones (A.7) y (A.8) y agrupando cada término con el que tiene debajo,

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1})(a_3 \cdot a_{n-2}) \cdots (a_{n-2} \cdot a_3)(a_{n-1} \cdot a_2)(a_n \cdot a_1)$$

cada uno de estos paréntesis es producto de términos equidistantes de los extremos; luego todos ellos son iguales al producto de $a_1 \cdot a_n$, de los extremos y como hay n paréntesis,

$$P^2 = (a_1 \cdot a_n)^n, \qquad \text{de donde:} \qquad P = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

El producto de n términos consecutivos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada de la potencia n-esima del producto de los extremos. ■

A.6.4. Suma de los términos de una progresión geométrica limitada

Dada la progresión geométrica $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ siendo S la suma de sus n primeros términos,

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

multiplicando los dos miembros de esta igualdad por la razón q,

$$Sq = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \cdots + a_{n-1} q + a_n q \tag{A.9}$$

pero por definición,

$$a_1q = a_2,\ a_2q = a_3,\ a_3q = a_4, \cdots, a_{n-1}q = a_n$$

la expresión (A.9) queda en la forma,

$$Sq = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_nq \tag{A.10}$$

si restamos de esta igualdad (A.10), la (A.9), tenemos,

$$Sq - S = a_nq - a_1 \qquad S(q-1) = a_nq - a_1$$

$$S = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \tag{A.11}$$

La suma de los n términos consecutivos de una progresión geométrica es una fracción cuyo numerador se obtiene restando el primer término del producto del último por la razón; el denominador es la diferencia entre la razón y la unidad. ∎

Ejemplo A.13 En una progresión geométrica de razón 3, cuyos extremos son 2 y 286, se desea calcular la suma de sus términos.

$$S = \frac{286 \cdot 3 - 2}{3-1} = \frac{856}{2} = 428$$

A.7. Resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es preciso conocer antes el concepto de eliminación.

Eliminar una incógnita en un sistema de varias ecuaciones con varias incógnitas es transformarle en otro sistema equivalente, formado por el mismo número de ecuaciones menos una, que no contenga dicha incógnita.

Procedimiento que debe seguirse en el caso de dos ecuaciones:

1. Eliminar una incógnita, esto es, transformar el sistema en otro equivalente, en el que aparezca una sola de las ecuaciones con una sola incógnita.

2. Resolución de esta ecuación con una sola incógnita.

3. Sustitución de la solución obtenida en una de las ecuaciones propuestas, cuya resolución nos dará el valor de la otra incógnita.

Los procedimientos de eliminación que se emplean normalmente son tres: método de sustitución, de igualación y de reducción.

A.7.1. Método de sustitución

Para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones por este método, se procede como sigue:

- Se despeja una incógnita cualquiera, por ejemplo x, en una de las ecuaciones.

- Se sustituye su valor en la otra ecuación, obteniéndose con ello una ecuación en la que no aparece x.
- Se resuelve la ecuación en la que solo aparece la incógnita y.
- Conocido el valor de y, se sustituye su valor en la expresión de x.

Ejemplo A.14 Resolver el sistema,

$$3x+y = 15 \tag{A.12}$$
$$5x-4y = 8 \tag{A.13}$$

Despejamos x en (A.12), así,

$$x=\frac{15-y}{3} \tag{A.14}$$

y sustituimos su valor en (A.13), obteniéndose la ecuación,

$$5\left(\frac{15-y}{3}\right)-4y=8 \qquad 75-5y-12y=24$$

de donde $17y=51$ y por tanto,

$$y=3$$

sustituyendo este valor en (A.14) tendremos,

$$x=\frac{15-3}{3}=4$$

los valores $x=4$, y $y=3$ son la solución al sistema.

Este método es el más ventajoso cuando una de las ecuaciones permite calcular fácilmente la incógnita que se quiere eliminar.

A.7.2. Método de reducción

En este método, se empieza por reducir al mismo coeficiente la incógnita que se quiere eliminar en las dos ecuaciones, para lo cual basta multiplicar los dos miembros de cada ecuación por el valor absoluto del coeficiente de dicha incógnita en la otra ecuación u otro factor elegido convenientemente, de modo que resulte el *mcm* de los coeficientes de la incógnita.

A continuación,

- Se suman (o restan según el signo) ambas ecuaciones.
- Se despeja la incógnita de la ecuación resultante y este valor se sustituye en una de las ecuaciones primitivas para hallar el valor de la otra incógnita.

Ejemplo A.15 Resolver el sistema,

$$5x-y = 5 \tag{A.15}$$
$$-2x+3y = 11 \tag{A.16}$$

Para eliminar x, multiplicamos (A.15) por 2 y (A.16) por 5, con lo cual obtenemos el sistema,

$$\begin{aligned} 10x-2y &= 10 \\ -10x+15y &= 55 \end{aligned}$$

que es un sistema equivalente al primitivo. Si sumamos ambas ecuaciones, resulta,

$$13y = 65 \qquad y = 5$$

y si sustituimos este valor de y en una de las ecuaciones (A.15) o (A.16), se tendrá $5x - 5 = 5$, de donde,

$$x = 2$$

el par de valores, $x = 2$, $y = 5$ forman la solución al sistema propuesto.

A.7.3. Método de igualación

La solución de un sistema lineal de dos ecuaciones por este método se realiza del siguiente modo,

- Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones obtenidas para la incógnita despejada.
- Se resuelve la ecuación obtenida con una incógnita.
- El valor hallado para dicha ingógnita se lleva a una de las expresiones iguales de la otra incógnita para calcular su valor.

Ejemplo A.16 Resolver el sistema de ecuaciones,

$$4x - y = -5 \tag{A.17}$$
$$8x + 5y = 32 \tag{A.18}$$

Despejando x en ambas ecuaciones,

$$x = \frac{y-5}{4} \qquad x = \frac{32-5y}{8}$$

igualando estas dos expresiones del valor de x, tendremos,

$$\frac{y-5}{4} = \frac{32-5y}{8}; \qquad 8\,(y-5) = 4\,(32-5y); \qquad 8y + 20y = 128 + 40$$

de donde, $28y = 168$, y por tanto, $y = 6$ que sustituyendo en una de las ecuaciones de x,

$$x = \frac{y-5}{4} = \frac{6-5}{4} = \frac{1}{4}$$

El par de valores, $x = \frac{1}{4}$, $y = 6$ son la solución al sistema.

A.8. Resolución de ecuaciones lineales con tres incógnitas

A un sistema de ecuaciones con tres incógnitas se le puede aplicar para su resolución, los tres métodos que hemos expuesto para los sistemas con dos ecuaciones.

A.8.1. Método de reducción

Se procede como sigue:

- Se forman dos sistemas de dos ecuaciones con una de ellas y todas las demás, igualando después los coeficientes, con respecto a la incógnita que se quiere eliminar, multiplicando las ecuaciones por el número conveniente para ello.
- Se suman (o restan) los pares de ecuaciones, según los coeficientes de la incógnita que se hayan igualado tengan signo igual o contrario.
- Las dos ecuaciones resultantes forman un sistema equivalente con dos incógnitas, que se resuelve.
- Conocido un par de valores, por sustitución en cualquiera de las ecuaciones propuestas, se obtendrá el valor de la tercera incógnita.

Ejemplo A.17 Sea el sistema,

$$x+y+z = 11 \tag{A.19}$$
$$2x-y+z = 5 \tag{A.20}$$
$$3x+2y+z = 24 \tag{A.21}$$

Si multiplicamos (A.19) por 6, (A.20) por -3 y (A.21) por -2, resulta,

$$6+6y+6z = 66 \tag{A.22}$$
$$-6x+3y-3z = -15 \tag{A.23}$$
$$-6x-4y-2z = -48 \tag{A.24}$$

sumando (A.22) con cada una de las otras dos, se obtiene el sistema,

$$9y+3z = 51 \tag{A.25}$$
$$2y+4z = 18 \tag{A.26}$$

que resuelto por cualquiera de los métodos ya conocidos se deduce que $y = 5$, $z = 2$, y estos valores, sustituidos en una de las ecuaciones dadas, nos darán el valor $x = 4$ que son las soluciones al sistema propuesto.

A.8.2. Método de sustitución

Para resolver un sistema de tres ecuaciones por el método de sustitución:

- Se despeja una incógnita cualquiera en una ecuación.
- Se sustituye la expresión hallada para esta incógnita en las otras dos ecuaciones, resultando entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Se resuelve este sistema por cualquiera de los métodos conocidos.
- El par de valores hallados se sustituyen en una cualquiera de las ecuaciones primitivas para obtener el valor de la tercera incógnita.

Ejemplo A.18 Sea el sistema,

$$5x - y + 2z = 2 \tag{A.27}$$
$$3y - x + z = 15 \tag{A.28}$$
$$3x + 2y - z = -2 \tag{A.29}$$

Despejando el valor de x en (A.28) (por ejemplo), tendremos,

$$x = -15 + 3y + z$$

Sustituyendo el valor de x en las otras dos ecuaciones, tendremos el sistema,

$$5(-15 + 3y + z) - y + 2z = 2 \tag{A.30}$$
$$3(-15 + 3y + z) + 2y - z = -2 \tag{A.31}$$

que resuelto por cualquiera de los métodos ya conocidos se deduce que $y = 5$, $z = 2$, y estos valores, sustituidos en una de las ecuaciones dadas, nos darán el valor $x = 4$ que son las soluciones al sistema propuesto.

A.9. Resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Toda ecuación con una incógnita que pueda reducirse a la forma,

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{A.32}$$

se dice de segundo grado en x, siendo a, b y c coeficientes numéricos o literales, positivos o negativos.

Ejemplo A.19 Sean las dos ecuaciones,

$$6x^2 - 15 = x^2 + 2x$$
$$x^3 + mx^2 + nx = 12 + 3x^2 + x^3$$

Efectuada la reducción y trasponiendo términos, tendremos las ecuaciones,

$$5x^2 - 2x - 15 = 0 \tag{A.33}$$
$$(m-3)\,x^2 + nx - 12 = 0 \tag{A.34}$$

reducidas a la forma general (A.32).

La resolución de la ecuación de segundo grado, de forma $ax^2 + bx + c = 0$, vendrá dada por la expresión,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{A.35}$$

Ejemplo A.20 Resolver la ecuación $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4}$$

que presenta las siguientes soluciones,

$$x_1 = \frac{7+5}{4} = 3 \qquad x_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$$