7

Operaciones de constitución. Préstamos

7.1. Operación de constitución

Es una operación compuesta de prestación múltiple de $a_1, a_2, \cdots, a_n$ y contraprestación única C_n, siendo el vencimiento de la contraprestación igual o posterior al último vencimiento de la prestación.

Se denomina también de formación de capital y tiene su base en que siempre puede suponerse que la prestación tiene la finalidad de formar o constituir el capital que se recibirá en concepto de contraprestación.

También se utiliza para instrumentar operaciones de ahorro como los fondos de inversión en sus diversas modalidades, los planes de ahorro, cuyo objeto es fomentar el ahorro de los particulares y los planes de pensiones.

Los planes de pensiones tratan de canalizar parte del ahorro de los trabajadores en activo para complementar su pensión en el momento de la jubilación. En España tienen un tratamiento fiscal favorable siempre que se acojan a la Ley de Regulación de los Planes y Fondos de Pensiones, aprobado por el Real Decreto Legislativo 1/2002, de 29 de noviembre y actualizaciones posteriores.

En muchas ocasiones, el capital constituido en vez de recibirse de una sola vez en el momento de la jubilación, se sustituye por una renta temporal o vitalicia.

7.1.1. Elementos de la constitución

Es usual concertar la operación con una ley de capitalización (compuesta) y con periodos uniformes (meses, trimestres,. . .). Lo habitual será obtener el cálculo de las imposiciones si el objetivo es alcanzar una cuantía determinada C_s o determinar el capital formado C_s al final de s periodos. En resumen, los elementos que intervienen en las operaciones de constitución, son los siguientes,

C_n = cuantía del capital a formar o contraprestación,
$a_1, a_2, \cdots, a_s$ = cuantía de la imposición, *anualidades*, *mensualidades*, etc. al principio del periodo s,
n = número de períodos,
i = tasa o tipo de interés,
I_s = cuotas de interés de cada período,
Δ_s = cuota de constitución del periodo s,
C_s = cuantía del capital formado al final del momento s,
K_s = cuantía del capital pendiente de formación al final del año s.

7.1.2. Constitución de un capital mediante imposiciones constantes

Se denomina también método progresivo. Es el método más frecuentemente usado y consiste en constituir un capital mediante pagos de igual cuantía a al principio de cada periodo y durante n, con rédito periodal i constante, para obtener la cuantía final C_n.

Responde por tanto a la hipótesis,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La equivalencia financiera, viene dada por,

$$C_n = a\ddot{s}_{\overline{n}|i} = a(1+i)s_{\overline{n}|i} \tag{7.1}$$

$$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} \tag{7.2}$$

Al final del periodo s, la cuantía obtenida utilizando el método retrospectivo, sería,

$$C_s = a\ddot{s}_{\overline{s}|i} = C_n \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.3}$$

El capital pendiente de constitución al final del periodo s, viene dado por,

$$K_s = C_n - C_s = C_n\left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}\right) = K_{s-1} - \Delta_s \tag{7.4}$$

Los intereses de cada periodo, pueden obtenerse como,

$$I_s = \Delta_s - a = (C_{s-1} + a)\, i \tag{7.5}$$

y las cuotas de constitución son la suma de las aportaciones más los intereses,

$$\Delta_s = a_s + I_s$$

o también, sabiendo que $\Delta_1 = a(1+i)$

$$\Delta_s = \Delta_{s-1}(1+i) = \Delta_1 (1+i)^{s-1} \tag{7.6}$$

que hará que se cumpla la relación,

$$C_s = C_{s-1} + \Delta_s = \sum_{r=1}^{s} \Delta_r$$

En la figura 7.1 podemos ver la representación de una operación de constitución.

Resulta útil recoger en un cuadro los valores que en el transcurso de la operación van tomando las magnitudes más importantes que intervienen en el proceso constitutivo de un capital. A este cuadro se le denomina *cuadro de constitución* y puede realizarse de la siguiente forma,

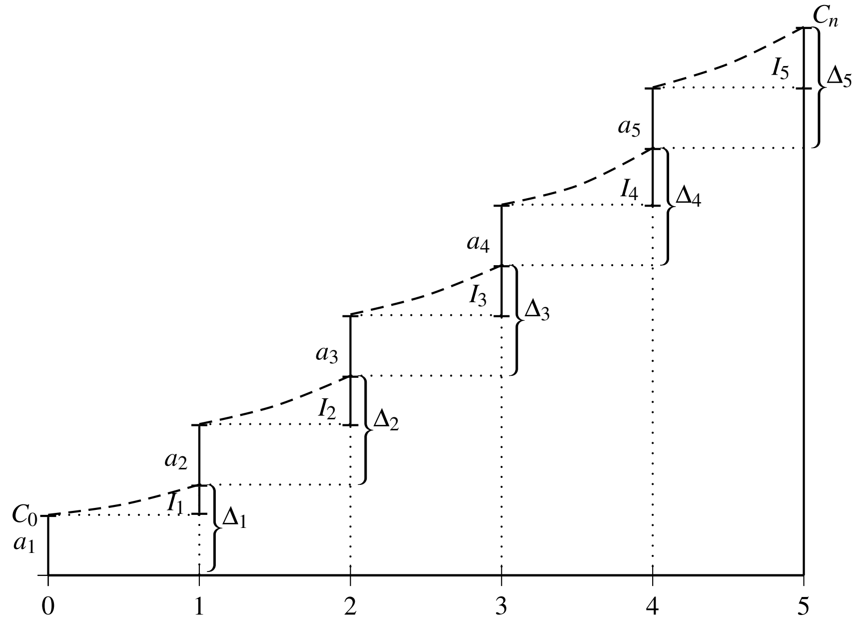

Figura 7.1: *Constitución de capital*

Per n	Término a	Intereses I_s	Constitución Δ_s	Constituido C_s	Pendiente K_s
0					K_0
1	$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n\rvert}i}}$	$I_1 = a\,i$	$\Delta_1 = a + I_1$	$C_1 = \Delta_1$	$K_1 = K_0 - \Delta_1$
2	$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n\rvert}i}}$	$I_2 = (C_1 + a)\,i$	$\Delta_2 = a + I_2$	$C_2 = C_1 + \Delta_2$	$K_2 = K_1 - \Delta_2$
$\vdots$					
s	$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n\rvert}i}}$	$I_s = (C_{s-1} + a)\,i$	$\Delta_s = a + I_s$	$C_s = C_{s-1} + \Delta_s$	$K_s = K_{s-1} - \Delta_s$
$\vdots$					
n	$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n\rvert}i}}$	$I_n = (C_{n-1} + a)\,i$	$\Delta_n = a + I_n$	$C_n = C_{n-1} + \Delta_n$	$K_n = K_{n-1} - \Delta_n$
					$K_n = 0$

En el caso de que las imposiciones sean en m-ésimos de año se procede de la misma forma, teniendo en cuenta que el número de periodos será nm y el rédito vendrá dado como $i^{(m)}$.

Ejemplo 7.1 Queremos constituir un plan de pensiones con aportaciones periódicas anuales de 1 200 € para formar un capital en el momento de la jubilación. Si el tipo de interés es del 4 %, obtener:

- la cuantía final obtenida dentro de 35 años,
- el cuadro de constitución de los 3 primeros años, y
- la cantidad a imponer para obtener un montante final de 110 000 €.

Para obtener el capital o montante final, utilizando (7.1),

$$C_n = a\ddot{s}_{\overline{n|}i} \qquad C_n = 1\,200\,\ddot{s}_{\overline{35|}0,04} = 91\,917,98$$

Si utilizamos la calculadora financiera, C_n

g BEG 35 n 4 i 0 PV 1200 CHS PMT FV obteniendo 91 917,98

El cuadro correspondiente a los tres primeros períodos lo realizamos según el modelo.

n	a	I_s	Δ_s	C_s	K_s
0					91 917,98
1	1 200	48,00	1 248,00	1 248,00	90 669,98
2	1 200	97,92	1 297,92	2 545,92	89 372,06
3	1 200	149,84	1 349,84	3 895,76	88 022,22
$\vdots$					

Utilizando la ecuación general,

$$C_n = a\ddot{s}_{\overline{35}|0,04} \qquad 110\,000 = a\ddot{s}_{\overline{35}|0,04} \qquad a = \frac{110\,000}{76,598314} = 1\,436,06$$

con la calculadora financiera,

g BEG 35 n 4 i 0 PV 110000 FV PMT con resultado de 1 436,06

7.2. Prestamos: conceptos básicos. Clasificación

Recibe este nombre toda operación financiera formada por una prestación única C_0 y contraprestación múltiple $a_1, a_2, \cdots, a_n$. La finalidad de la contraprestación es reembolsar el capital inicial C_0.

Un *préstamo*, es la operación financiera que consiste en la entrega, por parte de una persona (*prestamista*), de una cantidad de dinero, C_0, a otra (*prestatario*), quien se compromete a devolver dicha cantidad y satisfacer los intereses correspondientes en los plazos y forma acordados.

Se denomina *amortización* de un préstamo a la devolución o reembolso, por parte del prestatario, del importe del préstamo, C_0, junto con el pago de los intereses que va generando, en los plazos convenidos. Esto justifica el nombre de operación de amortización y el de términos amortizativos que suele asignarse a estos capitales de la contraprestación.

La operación de préstamo, así conformada, cumple el postulado de *equivalencia financiera* entre la cantidad entregada por el prestamista y la contraprestación múltiple del prestatario, en cualquier instante de tiempo; es decir, el valor actual del capital prestado debe ser igual al valor actual del capital que se reembolse (amortice). En el caso de que la contraprestación esté integrada por varios capitales financieros, la suma de los valores actuales de éstos tendrá que ser igual al valor actual del capital recibido en préstamo.

Es usual efectuar la operación con una ley de capitalización (generalmente la capitalización compuesta), y con períodos uniformes (años, trimestres, meses,...) siendo los más frecuentes los mensuales.

7.2.1. Elementos de un préstamo

Los problemas principales que plantea la amortización de un préstamo son: determinar la anualidad o término amortizativo, cálculo del capital pendiente de amortizar al principio de cada término y de la parte de deuda que se devuelve al final de cada término. En resumen, los elementos que intervienen en las operaciones de préstamo, son los siguientes,

C_0 = capital o importe del préstamo,

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ = términos amortizativos. Se denominan *anualidades*, *mensualidades*, etc. y normalmente se forman de una cantidad destinada a la amortización A_s y otra al pago de intereses I_s. $a_s = A_s + I_s$

n = tiempo o vida de duración de la operación del préstamo, n_0 es el origen de la operación,

i = tipo de interés. Puede ser constante o variable,

A_s = cuotas de amortización o de capital de cada uno de los períodos,

I_s = cuotas de interés de cada período,

M_s = cantidades de capital amortizado al final de cada período. Total amortizado. $M_s = \sum_{s=1}^{s} A_s$,

C_s = capital pendiente de amortizar. $C_s = C_0 - M_s$.

7.2.2. El tipo de interés. Componentes

El tipo de interés se suele determinar como un porcentaje de la cantidad prestada. En cualquier caso, puede resultar confuso hablar del tipo de interés como algo único, ya que en un momento dado hay diferentes tipos, que normalmente difieren por las razones siguientes:

- El *riesgo de la operación*. Cuando se concede un préstamo, siempre existe el riesgo de que éste no se recupere. Este riesgo será, sin embargo, muy distinto según las características del que lo solicita.

- La *garantía que ofrezca el solicitante del préstamo*. Los préstamos suelen demandar algún tipo de garantía; por ejemplo, en el caso del préstamo hipotecario, el prestamista tiene como garantía la propiedad del solicitante.

- El *período para el que se concede el préstamo*. Dependiendo del período por el que se concede el préstamo, variará el tipo de interés. Si es a largo plazo, conllevará un tipo más alto que si es a corto plazo.

El tipo de interés de un préstamo, tiene tres componentes:

1. El *tipo puro*, que es la remuneración que se exigirá por renunciar al consumo en el caso de que no hubiese inflación y que el préstamo careciera de riesgo.

2. Una *prima de riesgo*, que se añade al tipo puro para compensar el riesgo que conlleva el préstamo.

3. Una *prima de inflación* con la que el prestamista trata de asegurarse que la rentabilidad que obtiene en términos de capacidad adquisitiva, es decir, en términos reales, cubre el riesgo puro y la prima de riesgo.

7.2.3. Clasificación

La variedad de préstamos existentes puede agruparse, atendiendo a diferentes criterios. En este contexto y de acuerdo con los objetivos, se sigue el criterio de «amortización».

1. Préstamos amortizables con reembolso único
   a) Reembolso único,
   b) Reembolso único y pago periódico de intereses,
   c) Reembolso único con fondo de amortización,
2. Préstamos amortizables mediante una renta
   a) Amortización con fondos de amortización,
   b) Amortización por constitución del montante,
   c) Amortización con anualidades constantes, préstamo francés,
   d) Amortización con anualidades variables: en progresión aritmética, en progresión geométrica,...
   e) Método de cuota constante,
   f) Método alemán.

7.3. Préstamos amortizables con reembolso único

7.3.1. Reembolso único

Este préstamo, conocido también como préstamo elemental o simple, se caracteriza porque el préstamo recibido junto con sus intereses se reembolsa de una sola vez. Siendo C el capital prestado, i el tanto unitario de interés y n el plazo señalado para el reembolso, al final del plazo estipulado, el prestatario deberá reembolsar al prestamista el montante final del capital C al tanto i.

Al no entregarse ninguna cantidad hasta la finalización de la vida del préstamo, el valor de las variables, sería,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = 0$$

$$a_n = C_0(1+i)^n \tag{7.7}$$

que recuerda a una operación financiera con una sola prestación y contraprestación tal como se vió en (4.1) en la página 38. ■

Gráficamente,

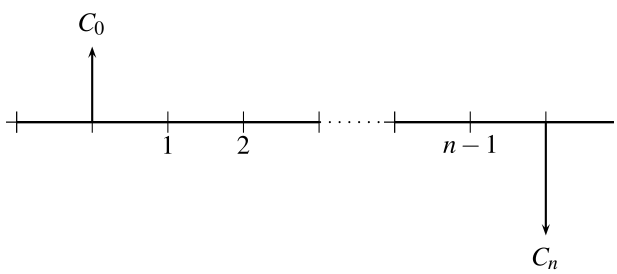

Figura 7.2: *Préstamo con reembolso único*

Ejemplo 7.2 Determinar el montante a devolver dentro de 8 años por un préstamo de 50 000 € pactando la operación al 6 %.

$$a_n = C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 50\,000\,(1+0{,}06)^8 = 79\,692{,}40$$

Un problema que puede surgir en este tipo de préstamos es cuando el deudor o prestatario pretende cancelar total o parcialmente el préstamo de forma anticipada. En este caso, transcurridos s períodos desde el comienzo de la operación, es usual que el prestamista efectúe operaciones de la misma naturaleza a un tipo de interés i' distinto de i (tipo de la operación en vigor). El prestamista, tiene que recibir al final C_n y cualquier deseo de alterar el prestatario las condiciones iniciales de la operación solo podrá ser aceptado por el prestamista si, como mínimo, obtiene los rendimientos esperados en su vigente contrato.

Por tanto, para *cancelar anticipadamente el préstamo*, al principio del período s, se exigirá como mínimo la cantidad V_s tal que se verifique la igualdad,

$$V_s(1+i')^{n-s} = C_n$$

Expresando C_n en función de C_s,

$$V_s(1+i')^{n-s} = C_s(1+i)^{n-s} \qquad V_s = C_s\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s} \tag{7.8}$$

Si solamente se pretende *reembolsar parcialmente*, entregando una cuantía $X_s < V_s$, el nuevo saldo o deuda pendiente será el valor C'_s que cumpla la ecuación,

$$X_s(1+i')^{n-s} + C'_s(1+i')^{n-s} = C_n = C_s(1+i)^{n-s}$$

de donde,

$$C'_s = C_s\left(\frac{1+i}{1+i'}\right)^{n-s} - X_s \qquad C'_s = C_0\frac{(1+i)^n}{(1+i')^{n-s}} - X_s \tag{7.9}$$

Ejemplo 7.3 Determinar para el préstamo anterior el saldo o capital vivo al principio del año quinto y la cantidad a devolver al principio del quinto año si el tanto del prestamista es $i' = 8\,\%$. Obtener igualmente el saldo pendiente en el supuesto de que hiciera una entrega parcial al principio del quinto año de 40 000 €.

$$C_4 = 50\,000(1+0{,}06)^4 = 63\,123{,}85$$

Utilizando (7.8), el valor, sería,

$$V_4 = C_4\left(\frac{1+0{,}06}{1+0{,}08}\right)^{8-4} = 58\,576{,}30$$

Al hacer una entrega parcial, el saldo aplicando (7.9),

$$C'_4 = 58\,576{,}30\left(\frac{1+0{,}06}{1+0{,}08}\right)^{8-4} - 40\,000 = 14\,356{,}36$$

7.3.2. Reembolso único con fondo de amortización

En este tipo, no se paga ninguna cantidad periódica pero sí se constituye un fondo mediante imposiciones de F_s de tal modo, que al final de la operación el importe constituido sea suficiente para saldar el capital prestado junto con sus intereses.

El capital pendiente de amortizar o reserva matemática en un momento s, sería,

$$C_s = C_0(1+i)^s - F s_{\overline{s}|i} \tag{7.10}$$

7.3.3. Reembolso único y pago periódico de intereses. Préstamo americano

Este tipo de préstamos difiere de la modalidad anterior en que el prestatario que recibe un préstamo C, está obligado a satisfacer cada año el pago de la cantidad $C\,i$, intereses de su deuda al tanto i, y reembolsar, mediante un pago único de C el capital que recibió como préstamo al término del año n.

Préstamo americano

En este caso particular, el préstamo recibido se reembolsa de una sola vez, pero al final del período se pagan los intereses generados,

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = C_0\, i \qquad\qquad a_n = C_0 + C_0\, i$$

Expresado de otra forma, recibe el nombre de amortización americana cuando son nulas las $n-1$ primeras cuotas de amortización e igual a C_0 la última, o sea,

$$A_1 = A_2 = A_3 = \cdots = A_{n-1} = 0 \qquad\qquad A_n = C_0$$

Los intereses, en consecuencia, serán,

$$I_1 = I_2 = I_3 = \cdots = I_n = C_0\, i$$

Ejemplo 7.4 Determinar las variables de un préstamo de 200 000 € por el sistema americano si $i = 8\,\%$ y tiene una duración de 10 años.

$$\begin{aligned}
&I_1 = I_2 = \cdots = I_{10} = 200\,000 \cdot 0,08 = 16\,000\\
&a_1 = a_2 = \cdots = a_9 = C_0\, i = 200\,000 \cdot 0,08 = 16\,000\\
&a_{10} = C_0 + C_0\, i = 200\,000 + 16\,000 = 216\,000\\
&A_1 = A_2 = \cdots = A_9 = 0\\
&A_{10} = C_0 = 200\,000
\end{aligned}$$

Préstamo americano con fondo de amortización «sinking fund»

Consiste en suponer que una parte de a_s se destina al pago de los intereses del capital inicial C_0 y el resto, F_s llamado *fondo de amortización* se aplica para la constitución del capital tal como hemos visto en (7.10).

El capital pendiente de amortizar en un instante s cualquiera, a través del método retrospectivo, vendrá determinado por,

$$C_s = C_0 - F s_{\overline{s}|i} \tag{7.11}$$

Ejemplo 7.5 Calcular el valor de un fondo para amortizar un préstamo americano de 1 000 000 € si $i = 4\,\%$ y se establece a 5 años.

$$F = \frac{C_0}{s_{\overline{5}|i}} = \frac{1\,000\,000}{\dfrac{(1+0,04)^5-1}{0,04}} = \frac{1\,000\,000}{5,416323} = 184\,627,10$$

Con la calculadora financiera, F,

5 [n] 4 [i] 1000000 [FV] [PMT] resultando 184 627,10

7.4. Préstamo francés

Los métodos particulares de amortización surgen al establecer la hipótesis sobre los términos amortizativos, las cuotas de amortización, la ley financiera de valoración o respecto a cualquier otra de las variables que intervienen en la operación financiera.

El *préstamo francés* o de términos amortizativos constantes, se caracteriza porque:

- Los términos amortizativos permanecen constantes, y
- El tanto de valoración permanece constante.

ambos durante toda la vida del préstamo,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

y en consecuencia,

- Las *anualidades* son todas iguales.
- Los *intereses* de cada período, van disminuyendo para cada anualidad.
- Las *cuotas de amortización* de cada período, van incrementándose.

Gráficamente, su diagrama de flujos, estaría representado tal como se muestra en la figura 7.3.

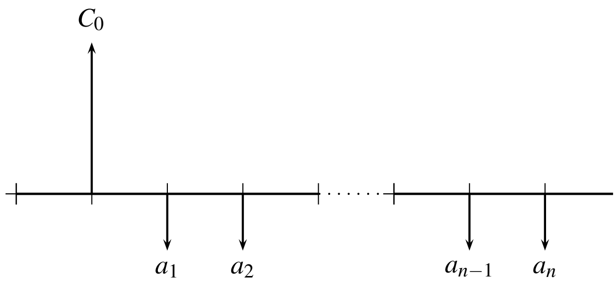

Figura 7.3: *Préstamo francés*

7.4.1. Anualidad

En este caso,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$$
$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = i$$

La *anualidad* se obtiene planteando la equivalencia financiera,

$$C_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \cdots + a(1+i)^{-n}$$
$$C_0 = a\, a_{\overline{n}|i}$$

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} \tag{7.12}$$

Los términos amortizativos, anualidades, se descomponen en dos partes: cuota de amortización y cuota de interés. De este modo,

$$a = A_s + I_s \tag{7.13}$$

La evolución del capital vivo, así como de las variables A_s e I_s están representadas en el gráfico 7.4. De esta forma, al principio la mayor parte de la cuota son intereses, siendo la cantidad destinada a amortización muy pequeña. Esta proporción va cambiando a medida que el tiempo va transcurriendo.

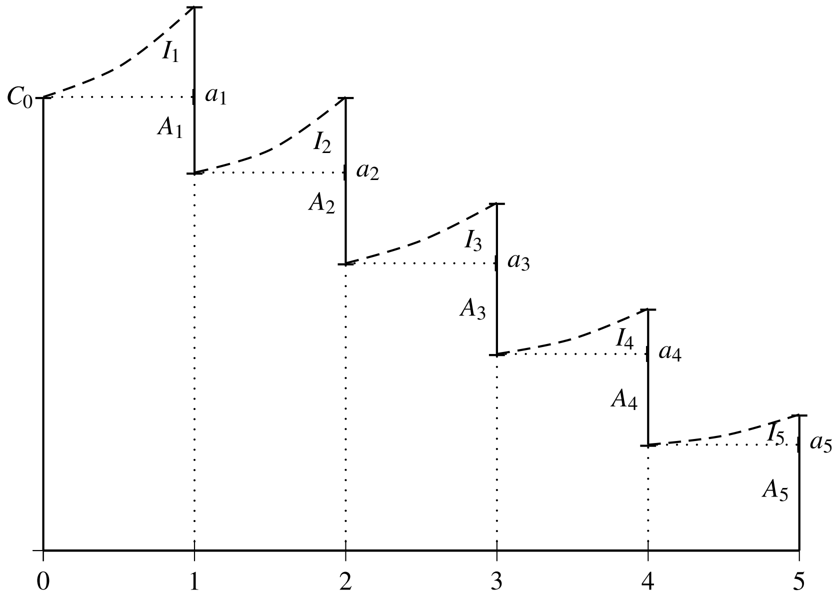

Figura 7.4: *Amortización del préstamo francés*

7.4.2. Capital pendiente

El *capital pendiente* o *reserva matemática*, puede obtenerse por,

Método retrospectivo: Diferencia entre el importe del préstamo y las anualidades pagadas o vencidas,

$$C_s = C_0(1+i)^s - a\, s_{\overline{s}|i} \tag{7.14}$$

Método prospectivo: El capital pendiente es el valor actual de las anualidades pendientes de pago o futuras,

$$C_s = a\, a_{\overline{n-s}|i} \tag{7.15}$$

Método recurrente: Se calcula como diferencia entre reserva matemática y la anualidad correspondiente,

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a \tag{7.16}$$

7.4.3. Cuotas de amortización

Las *cuotas de amortización* varían en progresión geométrica de razón $(1+i)$.

$$\begin{array}{ll} \text{En } s: & C_s = C_{s-1}(1+i) - a \\ \text{En } s+1: & C_{s+1} = C_s(1+i) - a \\ & \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s+1} - C_s)}_{A_s}(1+i) \end{array}$$

por tanto,

$$A_{s+1} = A_s(1+i)$$
$$A_{s+1} = A_1(1+i)^s$$

$$A_s = A_1(1+i)^{s-1} \tag{7.17}$$

A través de la anualidad,

$$a = A_1 + I_1 \qquad I_1 = C_0\, i \qquad A_1 = a - C_0\, i$$

A través de C_0,

$$C_0 = A_1 \underbrace{\left(1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1}\right)}_{s_{\overline{n}|i}} = A_1\, s_{\overline{n}|i}$$

Despejando A_1,

$$A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.18}$$

7.4.4. Capital amortizado, cuotas de interés

El *capital amortizado* viene determinado por la suma de las cuotas de amortización practicadas hasta ese momento,

$$M_s = A_1 + A_2 + \cdots + A_s = \sum_{h=1}^{s} A_h$$

$$M_s = A_1 + A_1(1+i) + A_1(1+i)^2 + \cdots + A_1(1+i)^{s-1} = A_1\, s_{\overline{s}|i} = C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$$

$$M_s = C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \tag{7.19}$$

Del mismo modo, también puede obtenerse el capital amortizado como,

$$M_s = C_0 - C_s$$

La *cuota de interés* se obtiene como diferencia,

$$I_s = a - A_s$$

o por el producto,

$$I_s = C_{s-1}\, i \tag{7.20}$$

7.4.5. El cuadro de amortización

Resulta útil recoger en un cuadro el proceso de amortización de un capital, reflejando de forma clara y concisa el valor que toman las principales magnitudes en los diversos vencimientos de la operación.

La denominación será la de cuadro de amortización, y en él vamos a hacer figurar los valores de los términos amortizativos a_s, las cuotas de interés $I_s = C_{s-1}\, i_s$ y las cuotas de amortización A_s correspondientes a cada uno de los períodos n, así como las cuantías del capital amortizado M_s y del capital vivo o pendiente C_s referidos.

El cálculo del cuadro de amortización se realiza de la siguiente forma,

Per n	Término a	Intereses I_s	Amortizado A_s	Acumulado M_s	Pendiente C_s
0					C_0
1	$a=\dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\mid i}}$	$I_1=C_0\,i$	$A_1=a-I_1$	$M_1=A_1$	$C_1=C_0-M_1$
2	$a=\dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\mid i}}$	$I_2=C_1\,i$	$A_2=a-I_2$	$M_2=M_1+A_2$	$C_2=C_0-M_2$
$\vdots$					
s	$a=\dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\mid i}}$	$I_s=C_{s-1}\,i$	$A_s=a-I_s$	$M_s=M_{s-1}+A_s$	$C_s=C_0-M_s$
$\vdots$					
n	$a=\dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\mid i}}$	$I_n=C_{n-1}\,i$	$A_n=a-I_n$	$M_n=M_{n-1}+A_n$	$C_n=C_0-M_n$
			$A_n=C_{n-1}$	$M_n=C_0$	$C_n=0$

Ejemplo 7.6 Se solicita un préstamo hipotecario de 50 000 € a pagar en 30 años mediante cuotas mensuales y a una tasa de interés nominal anual del 9 %, determinar:

- la cuantía de los términos amortizativos (mensualidad),
- cuadro de amortización de los 4 primeros términos,
- intereses pagados en el término 240,
- capital amortizado en los 5 primeros años.

Para la obtención del término amortizativo,

$$a=\frac{C_0}{a_{\overline{nm}\mid i_m}} \qquad a=\frac{50\,000}{a_{\overline{360}\mid 0,0075}}=402,31$$

Con la calculadora financiera, a

30 [g] [12×] 9 [g] [12÷] 50000 [PV] [PMT] obteniendo -402,31

La confección del cuadro, la realizamos siguiendo el modelo,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					50 000,00
1	402,31	375,00	27,31	27,31	49 972,69
2	402,31	374,80	27,51	54,82	49 945,18
3	402,31	374,59	27,72	82,54	49 917,46
4	402,31	374,38	27,93	110,47	49 889,53
$\vdots$					

Para obtener el cuadro con la calculadora,

1 [f] [AMORT] obteniendo -375 de intereses [x≶y] -27,31 y así sucesivamente

Los intereses pagados en el término 240, obteniéndolos por el método retrospectivo,

$$I_s=C_{s-1}\,i \qquad I_{240}=C_{239}\,i$$

$$C_s=C_0(1+i)^s-a\,s_{\overline{s}\mid i} \qquad C_{239}=50\,000\,(1+0,0075)^{239}-402,31\,s_{\overline{239}\mid 0,0075}$$

$$C_{239}=31\,922,90 \qquad I_{240}=31\,922,90\cdot 0,0075=239,42$$

Con la calculadora, I_{240}[1]

[1]En este caso, dado que hemos hecho cálculos previos con [AMORT] habría que restablecer los valores de [n] a 0 y el valor de [PV] al correspondiente al préstamo.

50000 [PV] 0 [n] 239 [f] [AMORT] 1 [f] [AMORT] obteniendo -239,42

El capital amortizado en los primeros 5 años, es,

$$M_{60} = C_0 - C_{60} \qquad C_{60} = 50\,000\,(1+0{,}0075)^{60} - 402{,}31\, s_{\overline{60}|0{,}0075}$$

$$M_{60} = 50\,000 - 47\,940{,}17 = 2\,059{,}83$$

Con la calculadora, M_{60}[2]

50000 [PV] 0 [n] 60 [f] [AMORT] [x≶y] resultando 2 059,83

7.5. Tanto efectivo para el prestatario

El prestatario recibe un efectivo C_0 menor que la cantidad nominal C entregada por el prestamista, ya que toda operación de préstamo genera unos gastos iniciales G_0 de notario, comisiones, etc. normalmente a cargo del tomador del préstamo o prestatario.

De otra parte, el prestatario se compromete a entregar el nominal del préstamo C junto con los intereses mediante pagos a lo largo de la duración n del préstamo. Si suponemos que el pago de estos términos se realiza a través de una institución financiera que cobra una cantidad g, en concepto de comisión por la gestión de pago realizada surgen así unos gastos adicionales que tienen el carácter de periódicos.

Analizando globalmente la operación financiera, el prestatario recibe $C_0 = C - G_0$, que devuelve mediante la contraprestación de los términos a que tienen un costo superior al añadir los gastos $a\,(1+g)$. De este modo, la equivalencia financiera será en general,

$$C_0 - G_0 = \sum_{i=1}^{n} a\,(1+i)^{-n}$$

y para términos constantes,

$$C_0 - G_0 = a\,(1+g)a_{\overline{n}|i} \tag{7.21}$$

expresión que permite encontrar el tipo de interés efectivo para el prestatario y que indica el coste financiero real de la operación. ■

Para su cálculo, podemos emplear cualquiera de los métodos vistos en (6.7) en la página 87.

Ejemplo 7.7 Una empresa solicita un préstamo de una entidad financiera por importe de 50 000 € que se compromete a reembolsar mediante cuotas anuales pospagables durante 3 años a un interés del 5 % revisable anualmente. Los gastos de formalización ascienden al 2 % del nominal de la deuda. Para el siguiente año, el interés revisado es del 4,75 %

Para obtener el término amortizativo inicial,

$$50\,000 = a\,a_{\overline{3}|0{,}05} \qquad a = 18\,360{,}43$$

El interés efectivo para el prestatario, deducidos los gastos,[3]

$$G_0 = 0{,}02 \cdot 50\,000 = 1\,000$$

[2]Igualmente sería preciso previamente poner el valor de [n] a 0 y el de [PV] al del préstamo.

[3]En la determinación del tipo de interés efectivo se incluirán las comisiones financieras que se carguen por adelantado en la concesión de financiación y demás costes de transacción atribuibles.

Para la determinación del tipo de interés efectivo i, con una calculadora, financiera,

$$50\,000-1\,000=18\,360,43\,a_{\overline{3}|i} \qquad i=0,060856$$

Interpolando, utilizando (A.1) de la página 179,

$$a_{\overline{3}|i}=\frac{49\,000}{18\,360,43}=2,668783 \qquad a_{\overline{3}|0,06}=2,673012 \qquad a_{\overline{3}|0,07}=2,624316$$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \frac{x-0,06}{0,07-0,06}=\frac{2,668783-2,673012}{2,624316-2,673012}$$

$$x-0,06=0,000868 \qquad x=0,060868\approx 6,0868\,\%$$

El cuadro, lo realizamos considerando el neto percibido y los términos a reembolsar,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					49 000,00
1	18 360,43	2 981,96	15 378,47	15 378,47	33 621,53
2	18 360,43	2 046,08	16 314,35	31 692,82	17 307,18
3	18 360,43	1 053,25	17 307,18	49 000,00	

El capital pendiente tras la primera amortización,

$$C_s=a\,a_{\overline{n-s}|i} \qquad C_1=18\,360,43=a\,a_{\overline{3-1}|0,05} \qquad C_2=34\,139,58$$

El nuevo término amortizativo, con i revisado sería,

$$34\,139,58=a\,a_{\overline{2}|0,0475} \qquad a=18\,295,41$$

y, el interés efectivo,

$$33\,621,53=18\,295,41\,a_{\overline{2}|i} \qquad i=0,058326$$

El nuevo cuadro de amortización,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
1					33 621,53
2	18 295,41	1 961,01	16 334,40	16 334,40	17 287,12
3	18 295,41	1 008,29	17 287,12	33 621,53	

7.6. Amortización con términos variables en progresión geométrica

Se trata de amortizar un capital de cuantía C_0 mediante n términos amortizativos que varían en progresión geométrica y, en consecuencia, se dará la relación,

$$a_s=a_{s-1}\,q=a_1\,q^{s-1}$$

siendo q la razón de la progresión, que necesariamente debe ser positiva para satisfacer la exigencia de que sea todo $a_s>0$.

Deberá verificarse,

$$C_0=\sum_{s=1}^{n}a\,q^{s-1}(1+i)^{-s}=V_0(a,q)_{\overline{n}|i}=a\,\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

y por tanto,

$$a=C_0\,\frac{1+i-q}{1-q^n(1+i)^{-n}}>0 \tag{7.22}$$

La reserva o saldo al principio del año $s+1$,

$$C_s = V_0(a_{s+1},q)_{\overline{n-s}|i} = a_{s+1}\frac{1-(1+i)^{-(n-s)}\,q^{n-s}}{1+i-q} \tag{7.23}$$

o bien,

$$C_s = C_{s-1}\,(1+i) - a_s$$

El resto de magnitudes, las obtenemos de la misma forma que en el método francés.

Ejemplo 7.8 Determinar el primer término de amortización de cada uno de los 5 primeros años, de un préstamo de 50 000 € a 30 años y el 12,50 %. Los pagos, tienen un incremento anual del 5 % para los primeros 5 años y son constantes para el resto.

$$V_0(C,q)_{\overline{n}|i} = C\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} \qquad i=\left(1+\frac{0,125}{12}\right)^{12}-1=0,132416$$

$$50\,000 = C\frac{1-1,05^5(1+0,132416)^{-5}}{1+0,132416-1,05} + C\,1,05^5\,a_{\overline{25}|0,132416}(1+0,132416)^{-5}$$

$$50\,000 = 3,817748C + 4,944667C \qquad C = 5\,706,19 \text{ (anual)}$$

$$i^{(12)} = \frac{0,125}{12} = 0,01047 \qquad 5\,706,19 = C\,s_{\overline{12}|0,010417} \qquad C_1 = 448,88$$

$$C_2 = 448,88\cdot 1,05 \qquad C_2 = 471,32$$
$$C_3 = 471,32\cdot 1,05 \qquad C_3 = 494,89$$
$$C_4 = 494,89\cdot 1,05 \qquad C_4 = 519,63$$
$$C_5 = 519,63\cdot 1,05 \qquad C_5 = 545,62$$

7.7. Amortización con términos variables en progresión aritmética

Este sistema plantea la amortización de un capital C_0 mediante términos amortizativos a variables en progresión aritmética de razón d y rédito periodal constante, pudiendo ser la razón d positiva o negativa, si bien en este segundo caso, para evitar términos negativos, deberá verificarse,

$$a+(n-1)d = a_n > 0$$

La equivalencia en el origen, debe cumplir,

$$C_0 = \sum_{s=1}^{n}\left[a+(s-1)d\right](1+i)^{-s} = V_0(a,d)_{\overline{n}|i} = \left(a+\frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d\,n\,(1+i)^{-n}}{i} \tag{7.24}$$

y, el valor del primer término,

$$a = \frac{C_0\,i + d\,n}{i\,a_{\overline{n}|i}} - \frac{d}{i} - d\,n \tag{7.25}$$

obteniéndose los restantes valores por la relación $a_s = a_{s-1}+d$. Si el valor de d resulta desconocido, podría obtenerse a partir de,

$$d = \frac{C_0 - a\,a_{\overline{n}|i}}{\dfrac{1+i\,n}{i}a_{\overline{n}|i} - \dfrac{n}{i}}$$

y la reserva o saldo,

$$
\begin{aligned}
C_s = V_0(a_{s+1},d)_{\overline{n-s}|i} &= \left[a_{s+1} + \frac{d}{i} + d\,(n-s)\right] a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d\,(n-s)}{i} \\
&= \left(a + \frac{d}{i} + d\,n\right) a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d\,(n-s)}{i} = \left(C_0 + \frac{d\,n}{i}\right) \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}} - \frac{d\,(n-s)}{i}
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

y el capital amortizado y las cuotas de interés los obtendremos como,

$$
M_s = C_0 - C_s \qquad\qquad I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\,i
$$

7.8. Amortización de cuota de capital constante. Método italiano

Este caso particular, justificado fundamentalmente por su sencillez, nace al exigir que,

$$
A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A
$$

y por tanto,

$$
C_0 = \sum_{h=1}^{n} A_h = nA
$$

resultando,

$$
A = \frac{C_0}{n} \tag{7.27}
$$

En consecuencia, el capital vivo disminuye en progresión aritmética de razón $A = \dfrac{C_0}{n}$.

$$
C_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r = (n-s)A = C_{s-1} - A
$$

y el capital amortizado, crece según la misma progresión,

$$
M_s = \sum_{r=1}^{s} A_r = sA = M_{s-1} + A
$$

Los intereses se calculan a partir de la deuda pendiente,

$$
I_s = C_{s-1}\,i \tag{7.28}
$$

Los términos amortizativos, son la suma de los intereses y la cuota de amortización, que en este caso es constante.

$$
a_s = I_s + A = C_{s-1}\,i_s + A \tag{7.29}
$$

Ejemplo 7.9 Determinar la anualidad y cuota de amortización primera de un capital de 480 000 € que se amortiza en 6 años por el método de cuotas anuales constantes a un tipo de interés del 9 %. Obtener el cuadro de los 3 primeros períodos.

$$
A = \frac{C_0}{n} = \frac{480\,000}{6} = 80\,000
$$

Utilizando (7.28),

$$
I_1 = C_0\,i \qquad\qquad I_1 = 480\,000 \cdot 0{,}09 = 43\,200
$$

y por tanto,

$$a_1 = A_1 + I_1 \qquad a_1 = 80\,000 + 43\,200 = 123\,200$$

Para construir el cuadro, obtenemos en primer lugar la cuota de amortización A. A continuación, el total amortizado M_s y la deuda pendiente C_s. A partir de esta, podemos calcular las cuotas de interés I_s y finalmente los términos a_s,

n	a_s	I_s	A	M_s	C_s
0					480 000
1	123 200	43 200	80 000	80 000	400 000
2	116 000	36 000	80 000	160 000	320 000
3	108 800	28 800	80 000	240 000	240 000

7.9. Préstamo alemán o «anticipativenzisen»

Se designa con este nombre a la operación de amortización con intereses prepagables, mediante términos amortizativos constantes $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$, siendo el rédito de capitalización i_s^* constante para todos los períodos $i_s^* = i^*$. También se conoce este caso particular como método de la Europa central o centroeuropeo.

En esta operación, el prestatario, a cambio de la prestación, paga en el momento de concertar el préstamo los intereses que devenga durante el primer período y, además, al término de cada período, un término amortizativo, que comprende la cuota de amortización del período y la cuota de intereses del período siguiente sobre el capital vivo.

Si relacionamos i^* como interés anticipado con i, tal como vimos en (2.6) en la página 12,

$$i^* = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{i^*}{1-i^*}$$

La ecuación de equivalencia en el origen C_0^* con el capital nominal, es,

$$C_0^* = a \sum_{s=1}^{n} (1-i^*)^{s-1} = a\,\frac{1-(1-i^*)^n}{i^*} = a\,a^*_{\overline{n}|i^*}$$

sustituyendo i^* en función de i, $i = \dfrac{i^*}{1-i^*}$,

$$C_0^* = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i) = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

siendo $C_0^* = C_0\,(1-i^*)^{-1} = C_0\,(1+i)$, y por tanto,

$$a = \frac{C_0^*}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} \tag{7.30}$$

Para calcular la anualidad, basta despejar a obteniéndose,

$$a = C_0^*\,\frac{i^*}{1-(1-i^*)^n} = \frac{C_0^*}{a^*_{\overline{n}|i^*}} = \frac{C_0^*}{\ddot{a}_{\overline{n}|i}} \tag{7.31}$$

teniendo en cuenta que la primera anualidad coincide con los intereses, la equivalencia se presenta así,

$$C_0^* = C_0^*\,i^* + a\,a^*_{\overline{n}|i^*}$$

Esta primera cuantía $C_0^*\,i^*$ en concepto de intereses prepagables constituye un pago simbólico, ya que se deduce del capital nominal en el momento de la entrega.

Las cuotas de intereses,

$$I_{s+1}^* = C_s^* \, i^* = a - A_s^* \tag{7.32}$$

siendo,

$$a_s = A_s + I_s$$

de la que se sigue,

$$A_s^* = A_{s+1}^* - (C_s^* - C_{s+1}^*)\, i^* = A_{s+1}^*(1-i^*) = A_n^*(1-i^*)^{n-s} = a\,(1-i^*)^{n-s} \tag{7.33}$$

fórmula que relaciona una cuota de amortización con sus posteriores. Al ser $A_n^* = a$, el cálculo de los restantes, es automático.

El capital vivo en un determinado momento s, es,

$$\begin{aligned} C_s^* = & \sum_{r=s+1}^{n} A_r^* = A_{s+1}^* + A_{s+2}^* + \cdots + A_{n-1}^* + A_n^* = \\ & = A_n^*(1-i^*)^{n-(s+1)} + A_n^*(1-i^*)^{n-(s+2)} + \cdots + A_n^*(1-i^*) + A_n^* = \\ & = A_n^* \frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*} = a\,\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*} = C_0^* \, \frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{1-(1-i^*)^n} = \\ & = a\, a^*_{\overline{n-s}|i^*} = a\, \ddot{a}_{\overline{n-s}|i} \end{aligned} \tag{7.34}$$

y para el capital amortizado,

$$M_s^* = C_0^* - C_s^* = C_0^* \left(1 - \frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{1-(1-i^*)^n}\right) = C_0^* \, \frac{s^*_{\overline{s}|i^*}}{s^*_{\overline{n}|i^*}} = C_0^* \, \frac{\ddot{s}_{\overline{s}|i}}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} \tag{7.35}$$

Ejemplo 7.10 En un préstamo alemán, de cuantía $C_0^* = 750\,000$, $i^* = 0,10$ y 12 años de duración, determinar: la anualidad, cuota de amortización del cuarto año, cuota de intereses del séptimo y capital vivo al principio del cuarto año.

La anualidad,

$$a = 750\,000 \frac{0,1}{1-(1-0,1)^{12}} = 104\,519,35$$

o también, utilizando el tipo i,

$$i = \frac{i^*}{1-i^*} = \frac{0,10}{1-0,10} = 0,111111$$

$$a = \frac{750\,000}{\dfrac{1-(1+0,111111)^{-12}}{0,111111}(1+0,111111)} = 104\,519,35$$

La cuota de amortización del cuarto año,

$$A_4^* = 104\,519,35\,(1-0,10)^{12-4} = 44\,992,15$$

Los intereses del séptimo año,

$$I_7^* = C_6^* \, i^* \qquad\qquad C_6^* = a\,\frac{1-(1-i^*)^{n-s}}{i^*}$$

$$I_7^* = 104\,519,35 \frac{1-(1-0,10)^{12-6}}{0,10} 0,10 = 48\,973,48$$

El capital vivo al principio del cuarto año,

$$C_4^* = 104\,519,35 \frac{1-(1-0,10)^{12-4}}{0,10} = 595\,271,97$$

o también,

$$C_4^* = 104\,519,35 \frac{1-(1+0,111111)^{-(12-4)}}{0,111111}(1+0,111111) = 595\,271,97$$

7.10. Amortización con intereses fraccionados

La operación de amortización consta de una prestación única C_0 y una contraprestación múltiple formada por n términos amortizativos.

El fraccionamiento de intereses consiste en dividir cada uno de los intervalos de n en m subperíodos, sustituyendo en este caso la correspondiente cuota de intereses I_s con vencimiento en s por las m cuotas de interés con vencimiento al final de cada uno de los respectivos subperíodos de m, siendo $i^{(m)}$ el rédito correspondiente al subperíodo. En consecuencia, cada término a_s, queda sustituido por el conjunto de m términos a_{sm}.

Se trata en realidad de la amortización de C_0 mediante nm términos amortizativos, de tal forma que es nula la cuota de amortización de todos los términos que ocupan un lugar no múltiplo de m.

Para la obtención del cuadro de amortización con fraccionamiento en el pago de los intereses, el número de filas se multiplicará por m para recoger la situación de cada una de las variables en los nuevos puntos de vencimiento.

7.11. Carencia, tipo de interés variable y cancelación anticipada

7.11.1. Carencia

El período de carencia t constituye un tiempo en el que no se produce la amortización del préstamo.

La carencia puede ser total, período en el cual no se abona ninguna cantidad y los intereses que se generan se suman al capital para amortizarse al final de la misma. En este caso, la deuda se ve incrementada por los intereses capitalizados al tipo correspondiente.

$$C'_0 = C_0\,(1+i)^t$$

En la carencia parcial, más habitual, se abonan solo los intereses durante el período de la misma.

Al finalizar el período de carencia, el préstamo se amortiza con normalidad según el método acordado. El valor de la deuda al final de la carencia se mantiene.

$$C'_0 = C_0$$

Ejemplo 7.11 Contratamos un préstamo de 74 000 € amortizable mensualmente por el sistema francés en 20 años al 3,30 % de interés. Se nos concede una carencia total de 1 año. Determinar el término amortizativo.

$$C_0\,(1+i_m)^{nm} = a\,a_{\overline{nm}|i_m} \qquad 74\,000\,(1+0{,}002750)^{12} = a\,a_{\overline{228}|0{,}002750} \qquad a = 451{,}96$$

7.11.2. Tipo de interés variable

En el mercado de préstamos, conocido también como «*lending*» existen operaciones a tipo fijo, si bien lo habitual es que el tipo de interés sea variable, revisable o una combinación de ambos.

En estos préstamos, las entidades suelen fijar el tipo de interés sobre un índice financiero (el Euribor, IRPH, etc.) que denominamos i_b al que se le suma un diferencial *spread* i_s que varía entre entidades y clientes y fijan una fecha periódica (anual o semestral) de revisión del tipo de interés,

$$i = i_b + i_s$$

En consecuencia, hablaremos de $i, i', i'', \cdots, i^k$ como diferentes tipos de interés aplicables a la operación financiera.

En la operación a tipo variable, se marcan fechas de revisión (anual, semestral, etc.) en las que el tipo de interés aplicable se ajusta con el nuevo i_b publicado en el mercado. Con el nuevo tipo resultante, a partir del capital pendiente C_s a la fecha se rehace el cuadro de amortización, calculando la nueva cuota.

En el momento s, el nuevo término amortizativo a', sería,

$$C_s = a_{s+1}(1+i)^{-1} + a_{s+2}(1+i)^{-2} + \cdots + a_n(1+i)^{-n+s} = \sum_{h=s+1}^{n} a_h(1+i)^{-h+s}$$

$$C_s = \sum_{h=s+1}^{n} a'_h(1+i)^{-h+s} \tag{7.36}$$

Elegir entre un préstamo a tipo fijo o variable depende del perfil del tomador y de su capacidad para negociar, aunque en determinados casos las condiciones vienen impuestas y no son negociables.

Una segunda opción podría ser mantener el término amortizativo constante, pero aumentar o disminuir el número de períodos. En este caso, obtendríamos el número de períodos de la expresión anterior.

Ejemplo 7.12 Tenemos contratado un préstamo de 74 000 € amortizable mensualmente con términos iguales en 20 años al 3,30 % de interés. A los 12 meses, se modifica el tipo de interés al 3,36 %. Determinar el nuevo término amortizativo.

Inicialmente, el término amortizativo, sería,

$$C_0 = a\, a_{\overline{nm}|i_m} \qquad 74\,000 = a\, a_{\overline{240}|0,00275} \qquad a = 421,60$$

El capital pendiente tras 12 meses, sería,

$$C_{12} = 421,60\, a_{\overline{240-12}|0,00275} \qquad C_{12} = 71\,342,10$$

El nuevo término, tras el cambio de tipo de i,

$$71\,342,10 = a\, a_{\overline{228}|0,0028} \qquad a = 423,76$$

7.11.3. Cancelación anticipada de un préstamo

La cancelación anticipada de un préstamo supone amortizarlo antes del tiempo convenido, modificando de este modo las condiciones establecidas en el contrato. Esta alteración de las condiciones pactadas debe venir recogida en el contrato y normalmente, la cancelación parcial o total del préstamo suele tener una comisión que se aplica sobre la cantidad amortizada anticipadamente. Esta comisión puede tener también un importe mínimo.

Financieramente, supone calcular el capital pendiente en el momento de la cancelación anticipada C_s, al que hay que restar la cantidad amortizada de forma anticipada A_a y que nos sirve para determinar el nuevo término amortizativo sobre el capital pendiente $C_s - A_a$.

Ejemplo 7.13 Tenemos contratado un préstamo de 74 000 € amortizable mensualmente por el sistema francés en 20 años al 3,30 % de interés.

Transcurridos 2 años, decidimos hacer una cancelación anticipada de 4 500 € por la que la entidad nos aplicará una comisión del 1 %. Determinar la cuantía de la misma y el nuevo término amortizativo.

El término amortizativo, sería,

$$C_0 = a\, a_{\overline{nm}|i_m} \qquad 74\,000 = a\, a_{\overline{240}|0,00275} \qquad a = 421,60$$

El capital pendiente tras 2 años ó 24 pagos,

$$C_{24} = 421,60\, a_{\overline{216}|0,00275} \qquad C_{24} = 68\,596,57$$

La cuantía de la amortización anticipada,

$$A_a = 4\,500 - 4\,500 \cdot 0,01 = 4\,455$$

y el término tras la amortización anticipada,

$$C_{24} - A_a = 68\,596,57 - 4\,455 = 64\,141,57 \qquad a = \frac{64\,141,57}{a_{\overline{216}|0,00275}} \qquad a = 394,22$$

7.12. Valor del préstamo, usufructo y nuda propiedad

En una operación de amortización de prestación y contraprestación en base a una ley financiera, puede establecerse en un momento s la conveniencia o no de una rescisión anticipada de la operación o transferencia a terceras personas de los derechos u obligaciones futuras.

En base a esto, definimos el *valor financiero del préstamo* en un determinado punto s como el valor actualizado de los términos futuros calculado con una ley financiera externa.

El valor financiero en s de cada uno de estos derechos parciales, en base a la nueva ley de valoración recibe el nombre de *valor financiero del usufructo* y *valor financiero de la nuda propiedad*.

El valor financiero del usufructo, $\mathcal{U}_s$, es el valor actual de los intereses pendientes I_r al nuevo tipo de interés de mercado i'_h,

$$\mathcal{U}_s = \frac{I_{r-1}}{(1+i'_h)} + \frac{I_{r-2}}{(1+i'_h)^2} + \cdots + \frac{I_r}{(1+i'_h)^{n-r}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{I_r}{(1+i'_h)^{r-s}}$$

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1}\, i_r \prod_{n=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

El valor financiero de la nuda propiedad, $\mathcal{N}_s$, es el resultado de actualizar al tanto de mercado i'_h todas las cuotas de amortizacíon A_r pendientes,

$$\mathcal{N}_s = \frac{A_{r-1}}{(1+i'_h)} + \frac{A_{r-2}}{(1+i'_h)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(1+i'_h)^{n-r}} = \sum_{r=s+1}^{n} \frac{A_r}{(1+i'_h)^{r-s}}$$

$$\mathcal{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r \prod_{n=s+1}^{r} (1+i'_h)^{-1}$$

siendo el valor financiero del préstamo o pleno dominio, la suma de los valores financieros del usufructo y de la nuda propiedad, esto es, $a_r = I_r + A_r$,

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s$$

que representa la cantidad que el deudor tendrá que pagar para cancelar la deuda o, desde el punto de vista del prestamista, lo que debería recibir por transferir los derechos futuros que el préstamo supone en las condiciones actuales del mercado.

7.12.1. Caso particular. La fórmula de Achard

Si los réditos periodales de la operación son constantes e iguales respectivamente a i e i', las expresiones del capital vivo, valor del préstamo, usufructo y nuda propiedad en s, serían,

La cuantía del capital vivo,

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i)^{-(r-s)}$$

el valor financiero del préstamo,

$$\mathcal{V}_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r (1+i')^{-(r-s)}$$

el valor financiero del usufructo,

$$\mathcal{U}_s = \sum_{r=s+1}^{n} C_{r-1}\, i (1+i')^{-(r-s)}$$

y el valor financiero de la nuda propiedad,

$$\mathcal{N}_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r (1+i')^{-(r-s)}$$

En estas condiciones, el valor de $\mathcal{V}_s$ y $\mathcal{N}_s$ verifican la siguiente relación,

$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{i'}\left[C_s - \mathcal{N}_s\right] \tag{7.37}$$

denominada *fórmula de Achard*.

La fórmula de Achard permite plantear un sistema de dos ecuaciones lineales que relacionan los cuatro valores básicos,

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_s & = & \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s & = & \dfrac{i}{i'}\left[C_s - \mathcal{N}_s\right] \end{array}\right\} \tag{7.38}$$

Al sustituir la segunda ecuación en la primera,

$$\mathcal{V}_s = \frac{i}{i'}\left[C_s - \mathcal{N}_s\right] + \mathcal{N}_s \tag{7.39}$$

conocida como *fórmula de Makeham*.

7.12.2. Aplicación a los métodos de amortización más utilizados

Préstamo americano

En base a la fórmula de Achard y Makeham pueden obtenerse los valores,

$$C_s = C_0$$

$$\mathcal{N}_s = C_0(1+i')^{-(n-s)}$$

$$\mathcal{U}_s = C_0\, i\, a_{\overline{n-s}|i'} = \frac{i}{i'}\left[C_0 - \mathcal{N}_s\right]$$

$$\mathcal{V}_s = C_0\, i\, a_{\overline{n-s}|i'} + C_0(1+i')^{-(n-s)}$$

Préstamo francés

En este caso,

$$C_s = a\, a_{\overline{n-s}|i}$$

$$\mathcal{V}_s = a\, a_{\overline{n-s}|i'}$$

y a través del sistema (7.37) se determinarán $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$

$$\mathcal{U}_s = \frac{i\left(\mathcal{V}_s - C_s\right)}{i-i'} = \frac{i\, a\left(a_{\overline{n-s}|i'} - a_{\overline{n-s}|i}\right)}{i-i'}$$

si despejamos $\mathcal{N}_s$,

$$\mathcal{N}_s = \frac{i C_s - i'\, \mathcal{V}_s}{i-i'} = \frac{a\left(i\, a_{\overline{n-s}|i} - i'\, a_{\overline{n-s)}|i'}\right)}{i-i'}$$

Préstamo con cuota de amortización constante

Por ser $A_s = A = \dfrac{C_0}{n}$ para todo s,

$$C_s = (n-s)A$$

y,

$$\mathcal{N}_s = A\, a_{\overline{n-s}|i'}$$

Aplicando la fórmula de Achard, se obtiene $\mathcal{U}_s$,

$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{i'}\left[(n-s)A - A\, a_{\overline{n-s}|i'}\right] = A\,\frac{i}{i'}\left[(n-s) - a_{\overline{n-s}|i'}\right]$$

y,

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s$$

Ejemplo 7.14 Se concede un préstamo de 100 000€ para ser amortizado en 10 años al 5 %. Si al inicio del quinto año el tipo de interés del mercado es del 7 %, determinar el valor del préstamo, del usufructo y de la nuda propiedad en los supuestos de que se haya aplicado el método de amortización americano, francés o de cuota de amortización constante.

Método americano,

$$C_4 = C_0 = 100\,000$$

$$\mathcal{U}_4 = 100\,000 \cdot 0{,}05 \cdot a_{\overline{10-4}|0{,}07}$$

$$\mathcal{U}_4 = 100\,000 \cdot 0,05 \cdot 4,766540 = 23\,832,70$$
$$\mathcal{N}_4 = C_0(1+0,07)^{-(10-4)} = 66\,634,22$$
$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 = 23\,832,70 + 66\,634,22 = 90\,466,92$$

Método francés,

$$100\,000 = a\, a_{\overline{10}|0,05} \qquad a = 12\,950,46$$
$$C_4 = 12\,950,46\, a_{\overline{10-4}|0,05} = 65\,732,55$$
$$\mathcal{V}_4 = 12\,950,46\, a_{\overline{10-4}|0,07} = 61\,728,88$$
$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{V}_s & = & \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s \\ \mathcal{U}_s & = & \frac{i}{i'}[C_s - \mathcal{N}_s] \end{array}\right\}$$
$$\left.\begin{array}{rcl} 61\,728,88 & = & \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 \\ \mathcal{U}_4 & = & \frac{0,05}{0,07}[65\,732,55 - \mathcal{N}_4] \end{array}\right\}$$
$$\frac{61\,728,88 - 46\,951,82}{0,285714} = \mathcal{N}_4 = 51\,719,71$$
$$61\,728,88 - 51\,719,71 = \mathcal{U}_4 = 10\,009,17$$

Método de cuota de amortización constante,

$$C_4 = (10-4)\frac{100\,000}{10} = 60\,000$$
$$\mathcal{N}_4 = 10\,000\, a_{\overline{10-4}|0,07} = 47\,665,40$$
$$\mathcal{U}_4 = \frac{0,05}{0,07}\left[6 \cdot 10\,000 - 10\,000\, a_{\overline{10-4}|0,07}\right] = \frac{0,05}{0,07}\left[60\,000 - 47\,665,40\right] = 8\,810,43$$
$$\mathcal{V}_4 = \mathcal{U}_4 + \mathcal{N}_4 = 8\,810,43 + 47\,665,40 = 56\,475,83$$

7.13. Hipoteca inversa, venta de la nuda propiedad

7.13.1. Hipoteca inversa

La hipoteca inversa es un producto financiero que consiste en un préstamo o crédito de prestación C_0 y reembolso único C_n con garantía hipotecaria destinado a personas mayores de 65 años o dependientes que les permite obtener liquidez a partir de su patrimonio inmobiliario sin perder la propiedad.

Por tanto, se puede disponer de un crédito sobre la vivienda utilizando ésta como garantía. Las cantidades se pueden percibir en forma de un importe único al inicio, como mensualidades, o una combinación, es decir, una cantidad inicial más una periódica (habitualmente mensual). En todo caso, el solicitante, mantiene la propiedad y el usufructo de la vivienda.

Por sus características, no hay cuotas de amortización, es decir, no hay que hacer devoluciones periódicas, sino únicamente tras el fallecimiento o cuando se decida libremente. Frecuentemente, los tipos de interés aplicados, son superiores a los establecidos en la hipoteca normal.

Está regulada por la `Ley 41/2007` para promover el desarrollo de un mercado de hipotecas inversas que permitan a los mayores utilizar parte de su patrimonio inmobiliario para aumentar su renta.

Suele tener bonificaciones, con exención del IAJD, además de unas tasas notariales y registrales inferiores. No obstante, tiene unos gastos iniciales G_0 como la comisión de apertura y la tasación.

Para su cálculo, utilizaremos el reembolso único visto en 7.3.1, página 112. La determinación de las rentas en su caso, se hará considerando el valor percibido como actual C_0 y calculando la renta temporal a como hemos visto en 6.2 en la página 78 utilizando la expresión (6.2).

En los supuestos de percibir el valor como una renta a, esta la podremos considerar como temporal o vitalicia. Para los cálculos de las rentas temporales, se estimará como tiempo n el correspondiente a $t_n - t_s$ siendo t_n la esperanza de vida y t_s la edad del solicitante.

7.13.2. Venta de la nuda propiedad

La venta de la nuda propiedad, es una operación financiera que permite al vendedor obtener liquidez y seguir como usufructuario de la vivienda. El interesado, vende la nuda propiedad $\mathcal{N}_s$, y conserva el usufructo $\mathcal{U}_s$, a cambio de un precio, cuyo importe se recibe normalmente íntegro el día de la firma. Tras el fallecimiento, el comprador se queda con el inmueble. Puede convertirse en una renta mediante un plan de seguro, percibiendo las cantidades a periódicamente.

La determinación del valor del usufructo viene regulado en el artículo 26 de la Ley 29/1987.

Ejemplo 7.15 Determinar el valor obtenido en una hipoteca inversa si la tasación de la vivienda es de 307 885 €, el crédito se concede por el 50 %, se aplica un interés del 6 % y se estiman 20 años.

Si con el importe obtenido se contrata un plan de seguro para obtener una renta temporal de 12 años o vitalicia, determinar el importe mensual de la misma si la rentabilidad estimada es del 1,5 %. Obtener igualmente la mensualidad vitalicia si se decide percibir el 50 % al inicio.

Calcular la renta percibida en el supuesto de la venta de la nuda propiedad.

El valor obtenido, sería,

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad 153\,942,50 = C_0\,(1+0,06)^{20}$$

$$C_0 = \frac{153\,942,50}{(1+0,06)^{20}} \qquad C_0 = 48\,000$$

Contratando un plan de seguros, la mensualidad la obtendríamos en el caso de temporal a 12 años como,

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad a = \frac{48\,000}{a_{\overline{144}|0,001250}} \qquad a = 364,44$$

o en el supuesto de vitalicia,

$$C_0 = a\,a_{\overline{\infty}|i} \qquad a = \frac{48\,000}{\dfrac{1}{0,001250}} \qquad a = 60$$

Si optáramos por percibir 24 000 € al inicio, más una mensualidad en las mismas condiciones,

$$a = \frac{24\,000}{a_{\overline{144}|0,001250}} \qquad a = 182,22$$

y en el supuesto de vitalicia,

$$a = \frac{24\,000}{\dfrac{1}{0,001250}} \qquad a = 30$$

Si se trata de la venta de la nuda propiedad, estimaríamos inicialmente el valor del usufructo de acuerdo con la normativa. Teniendo en cuenta la edad de 70 años, se consideraría este del 20 %. Por tanto el valor de la nuda propiedad, sería $\mathcal{N}_S = 307\,885 - 0,2 \cdot 307\,885) = 246\,308$, y en consecuencia, la renta percibida, la obtendríamos,

$$C_0 = a\, a_{\overline{n}|i} \qquad 246\,308 = a\, a_{\overline{144}|0,001250}$$

$$a = \frac{246\,308}{a_{\overline{144}|0,001250}} \qquad a = 1\,870,10$$

o si fuera vitalicia como,

$$a = \frac{246\,308}{\dfrac{1}{0,001250}} \qquad a = 307,88$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1 Determinar las aportaciones constantes prepagables de una operación de constitución cuyas características son: cuantía del capital a formar 200 000 €, duración de la operación, 28 años y tipo de interés anual concertado del 6 %. Construir el cuadro correspondiente a los 4 primeros años.

Solución: 2 753,31

Ejercicio 7.2 Si se pretende formar un capital de 300 000 € mediante imposiciones constantes al principio de cada trimestre, con un interés anual del 4,50 % y durante 30 años, determinar:

1. Cuantía de la imposición constante,
2. Capital constituido después de 20 imposiciones,
3. Cuota de constitución del décimo trimestre,
4. Intereses formados en el sexto período.

Solución: 1) 1 179,95 2) 26 595,70 3) 1 319,62 4) 81,92

Ejercicio 7.3 Un préstamo de 10 000 € que se amortiza mediante reembolso único a los 8 años a un interés del 6 %, es reembolsado en parte por entrega del prestatario a los 4 años por 5 000 €. Determinar el saldo acreedor al vencimiento del mismo en los siguientes casos:

1. El acreedor acepta el mismo tipo de evaluación,
2. El tipo de interés del mercado, se modifica al 5 %

Solución: 1) 9 626,10 2) 9 267,96

Ejercicio 7.4 Un préstamo de 20 000 € amortizable mediante reembolso único a los 10 años, con un intereses anual al 12 %, quiere cancelarse a los 5 años. Se pide la cantidad que cancela el préstamo si el tipo vigente en el mercado en dicho momento es del 10 %.

Solución: $C_5 = 38\,569,75$

Ejercicio 7.5 Se obtiene un préstamo de 10 000 € amortizable mediante reembolso único a los 10 años, con pago anual de intereses al 10 %. Si a los 4 años, después de pagar los intereses, el prestatario hace una entrega parcial de 2 500 €. Determinar el saldo en dicho momento, si el tanto de interés vigente en el mercado es del 8 %.

Solución: $C_4 = 8\,372,88$

Ejercicio 7.6 ¿A qué tipo de interés se ha de prestar un capital C_0 para que en n años el valor de la contraprestación sea k veces el del préstamo? Aplicar el resultado para $k = 3$ y $n = 12$.

Solución: $i = k^{\frac{1}{n}} - 1$ $\quad i = 0{,}095873$

Ejercicio 7.7 Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 5 000 € pagadero en cinco plazos semestrales, siendo el tipo nominal de la operación del 10 % y las cuotas de amortización semestral constantes.

Ejercicio 7.8 Formar el cuadro de amortización de un préstamo de 10 000 € amortizable en 8 años, con abono de intereses al 10 % y amortizable mediante términos constantes.

Ejercicio 7.9 Se desea amortizar en 20 años un préstamo de 150 000 € mediante anualidades constantes, valorado al 5 % anual, se pide determinar:

1. La anualidad,
2. El capital amortizado después del pago de la octava anualidad,
3. Cuota de interés del año 10,
4. Cuota de amortización del año 14,
5. Deuda pendiente al comienzo del año 16.

Solución: 1) $a = 12\,036{,}39$ $\quad$ 2) $M_8 = 43\,318{,}46$
3) $I_{10} = 4\,998{,}96$ $\quad$ 4) $A_{14} = 8\,554{,}04$ $\quad$ 5) $C_{15} = 52\,111{,}26$

Ejercicio 7.10 El banco concede un préstamo de 10 000 € al 5 %. Su amortización se hará mediante la entrega de 10 pagos anuales iguales, teniendo lugar el primero a los tres años de efectuado el préstamo. Determínese:

1. La anualidad,
2. Si el prestatario después de satisfecha la cuarta anualidad, pretende sustituir el resto del reembolso mediante una entrega única satisfecha dos años después, cuál sería la cuantía de esta entrega.

Solución: 1) $a = 1\,427{,}79$ $\quad$ 2) $C_s = 7\,989{,}82$

Ejercicio 7.11 Formar el cuadro de amortización por el método francés de un préstamo de 35 000 € concertado al 6,50 % a amortizar en siete años.

Ejercicio 7.12 Se concede un préstamo de 50 000 € para amortizarse por el método americano con fondo de amortización en cinco años al tipo de interés del 6,50 % anual. Obtener el montante a devolver.

El deudor concierta por otra parte un fondo de reconstitución, por la misma duración, a un tipo de interes del 5 % anual, comprometiéndose a depositar al final de cada año la cantidad constante necesaria para formar el principal percibido en préstamo. Determinar la cuantía de la misma.

Solución: $C_5 = 68\,504{,}33$ $\quad F = 9\,048{,}74$

Ejercicio 7.13 Una sociedad obtiene un préstamo de 20 000 €, que deberá amortizar mediante 6 anualidades vencidas, siendo el tipo de interés del 5 % para los primeros tres años y del 6 % para los restantes. Se pide confeccionar el cuadro de amortización.

Solución: $a_1 = 3\,940{,}35$ $\quad a_4 = 4\,014{,}40$

Ejercicio 7.14 Se obtiene un préstamo de 40 000 €, al 6 %, se pide determinar el cuadro de amortización del mismo en los siguientes casos:

1. Operación contratada a 6 años, amortizable mediante anualidades constantes,
2. Operación contratada a 6 años, amortizable mediante cuotas constantes.

Ejercicio 7.15 Se recibe un préstamo hipotecario de 120 000 € que se tiene que devolver en 30 años mediante anualidades constantes, al tipo efectivo anual del 6 % y con una comisión de apertura del 1 %. Obtener:

1. Anualidad,
2. Cuotas de amortización del año 3 y 20,
3. Capital amortizado al final del año 12,
4. Cuotas de interés correspondientes al quinto y último año,
5. Capital pendiente al término del séptimo año,
6. Confecciona el cuadro de amortización correspondiente a los períodos 14 a 18,
7. Tanto efectivo para el prestatario.

Solución: 1) $a = 8\,717,87$ 2) $A_3 = 1\,705,48$ $A_{20} = 4\,592,46$
3) $M_{12} = 25\,606,37$ 4) $I_5 = 6\,801,59$ $I_{30} = 493,46$
5) $C_7 = 107\,259,25$ 7) $i = 6,094\,\%$

Ejercicio 7.16 Se concierta un préstamo a 20 años de 160 000 € con pagos mensuales iguales a un interés del 5 % nominal anual y un 1,25 % de gastos iniciales correspondientes a la apertura. Obtener:

1. Mensualidad,
2. Capital amortizado en los dos primeros años,
3. Cuota de interés correspondiente a la 8.ª mensualidad,
4. Capital pendiente una vez pagadas las mensualidades de los 10 primeros años,
5. Mensualidad del mes 14 en el supuesto de que el tipo de interés se haya modificado al 5,25 %,
6. Tanto efectivo para el prestatario.

Solución: 1) $a = 1\,055,93$ 2) $M_{24} = 9\,803,93$ 3) $I_8 = 655,17$
4) $C_{120} = 99\,554,38$ 5) $a' = 1\,077,16$ 6) $i = 5,274\,\%$

Ejercicio 7.17 ¿Cuál es la deuda al inicio del quinto año de un préstamo de 100 000 € a 5 años con pagos mensuales al 4 % de interés?

Solución: $C_{48} = 21\,628,33$

Ejercicio 7.18 Al solicitar un préstamo de 10 000 € a devolver en 3 años para la adquisición de un vehículo, recibimos la siguiente oferta: nos entregan 11 000 € a devolver 345 € mensuales. Determinar el tipo de interés nominal de la operación.

Solución: $J_{(12)} = 8,065\,\%$

Ejercicio 7.19 Para la compra de un vehículo, nos ofrecen la siguiente fórmula de financiación: entrada de 11 000 €, 48 mensualidades de 320 € y 25 000 € una vez finalizadas las mensualidades. La TAE aplicada a la operación es del 8,15 %. Determinar el valor actual o coste al contado del mismo.

Solución: $C_0 = 42\,417,04$

Ejercicio 7.20 Para la compra de un vehículo, financio 20 000 € al 2,79 % durante 3 años. Determinar la cuota mensual y la TAE si los gastos de formalización del crédito ascienden a 200 €.

Solución: $a = 579,78$ $\quad i = 3,509\,\%$

Ejercicio 7.21 Por la compra de un vehículo de 20 000 € nos ofrecen la siguiente financiación. Entregamos 6 000 € iniciales, tendremos que hacer un pago mensual durante 3 años y un pago final de 8 000 € si queremos quedarnos con el vehículo. Determinar la mensualidad si el interés aplicado es del 6 %.

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 7.1

$$a = \frac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}|i}} = \frac{200\,000}{\ddot{s}_{\overline{28}|0,06}} = 2\,753,31$$

$$I_1 = 2\,753,31 \cdot 0,06 = 165,20 \qquad \Delta_1 = 2\,753,31 + 165,20 = 2\,918,51$$

$$C_1 = 2\,918,51 \qquad K_1 = 200\,000 - 2\,918,51 = 197\,081,49$$

El cuadro de constitución, sería el siguiente,

n	a	I_s	Δ_s	C_s	K_s
0					200 000,00
1	2 753,31	165,20	2 918,51	2 918,51	197 081,49
2	2 753,31	340,31	3 093,62	6 012,13	193 987,87
3	2 753,31	525,93	3 279,24	9 291,37	190 708,63
4	2 753,31	722,68	3 475,99	12 767,36	187 232,64

Solución ejercicio 7.2

1. Obtenemos el tipo de interés efectivo trimestral previo a determinar la aportación,

$$i^{(4)} = \frac{0,045}{4} = 0,01125 \qquad a = \frac{300\,000}{\ddot{s}_{\overline{120}|0,01125}} = 1\,179,95$$

2.

$$C_{20} = a\,\ddot{s}_{\overline{20}|0,011250} \qquad C_{20} = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{20}|0,01125} = 26\,595,70$$

3.

$$\Delta_{10} = a_{10} + I_{10} \qquad I_{10} = (C_9 + a)\,i \qquad C_9 = a\,\ddot{s}_{\overline{9}|0,01125}$$

$$C_9 = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{9}|0,01125} \qquad C_9 = 11\,235,22$$

$$I_{10} = (11\,235,22 + 1\,179,95)0,01125 = 139,67$$

$$\Delta_{10} = 1\,179,95 + 139,67 = 1\,319,62$$

o también,

$$\Delta_{10} = \Delta_1(1+i)^{s-1}$$

$$\Delta_{10} = 1\,179,95 \cdot 1,01125 = 1\,193,22(1+0,01125)^9 = 1\,319,62$$

4.

$$I_6 = (C_5 + a)\,i \qquad C_5 = a\,\ddot{s}_{\overline{5}|0,01125}$$

$$C_5 = 1\,179,95\,\ddot{s}_{\overline{5}|0,01125} = 6\,101,88$$

$$I_6 = (6\,101,88 + 1\,179,95)\,0,01125 = 81,92$$

Solución ejercicio 7.3

$$C_n = 10\,000(1+0,06)^4 = 12\,624,77$$

$$12\,624,77 - 5\,000 = 7\,624,77$$

$$C_n = 7\,624,77\,(1+0,06)^4 = 9\,626,10$$

$$C_n = 7\,624,77\,(1+0,05)^4 = 9\,267,96$$

Solución ejercicio 7.4

$$C_5 = 20\,000(1+0,12)^5 = 35\,246,83$$
$$V_5 = 35\,246,83\left(\frac{1+0,12}{1+0,10}\right)^{10-5} = 38\,569,75$$

Solución ejercicio 7.5

$$C_4 = 10\,000 - 2\,500 = 7\,500$$
$$V_4 = 7\,500\left(\frac{1+0,10}{1+0,08}\right)^{10-4} = 8\,372,88$$

Solución ejercicio 7.6

$$kC_0 = C_0(1+i)^n \qquad (1+i)^n = \frac{kC_0}{C_0}$$
$$(1+i)^n = k \qquad 1+i = k^{\frac{1}{n}} \qquad i = k^{\frac{1}{n}} - 1$$
$$i = 3^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i = 0,095873$$

Solución ejercicio 7.7

$$A_s = \frac{5\,000}{5} = 1\,000$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					5 000
1	1 250	250	1 000	1 000	4 000
2	1 200	200	1 000	2 000	3 000
3	1 150	150	1 000	3 000	2 000
4	1 100	100	1 000	4 000	1 000
5	1 050	50	1 000	5 000	0

Solución ejercicio 7.8

$$C_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 10\,000 = a\,a_{\overline{8}|0,10} \qquad a = 1\,874,44$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					10 000,00
1	1 874,44	1 000,00	874,44	874,44	9 125,56
2	1 874,44	912,56	961,88	1 836,32	8 163,68
3	1 874,44	816,37	1 058,07	2 894,40	7 105,60
4	1 874,44	710,56	1 163,88	4 058,28	5 941,72
5	1 874,44	594,17	1 280,27	5 338,54	4 661,46
6	1 874,44	466,15	1 408,29	6 746,84	3 253,16
7	1 874,44	325,32	1 549,12	8 295,96	1 704,04
8	1 874,44	170,40	1 704,04	10 000,00	0,00

Solución ejercicio 7.9

1.
$$V_0 = a\,a_{\overline{n}|i} \qquad 150\,000 = a\,a_{\overline{20}|0,05} \qquad a = 12\,036,39$$

2.
$$M_8 = C_0\frac{s_{\overline{8}|0,05}}{s_{\overline{20}|0,05}} \qquad M_8 = 150\,000\,\frac{9,549109}{33,065954} = 43\,318,46$$

3.
$$I_{10} = C_9\, i \qquad C_9 = a\, a_{\overline{n-s}|i} \qquad C_9 = 12\,036,39\, a_{\overline{20-9}|0,05}$$
$$I_{10} = 99\,979,24 \cdot 0,05 = 4\,998,96$$

4.
$$A_{14} = a - I_{14} \qquad I_{14} = C_{13}\, i \qquad C_{13} = a\, a_{\overline{n-s}|i}$$
$$C_{13} = 12\,036,39\, a_{\overline{20-13}|0,05} \qquad I_{14} = 69\,647,04 \cdot 0,05 = 3\,482,35$$
$$A_{14} = 12\,036,39 - 3\,482,35 = 8\,554,04$$

5.
$$C_{15} = a\, a_{\overline{n-s}|i} = 12\,036,39\, a_{\overline{20-15}|0,05}$$
$$C_{15} = 52\,111,26$$

Solución ejercicio 7.10

1.
$$10\,000 = a\, a_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^{-2} \qquad a = 1\,427,79$$

2.
$$C_4 = 1\,427,79\, a_{\overline{10-4}|0,05} \qquad C_4 = 7\,247,02$$
$$C_2 = 7\,247,02(1+0,05)^2 = 7\,989,84$$

Solución ejercicio 7.11

$$C_0 = a\, a_{\overline{n}|i} \qquad 35\,000 = a\, a_{\overline{7}|0,065} \qquad a = 6\,381,60$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					35 000,00
1	6 381,60	2 275,00	4 106,60	4 106,60	30 893,40
2	6 381,60	2 008,07	4 373,53	8 480,13	26 519,87
3	6 381,60	1 723,79	4 657,81	13 137,94	21 862,07

Solución ejercicio 7.12

$$C_n = 50\,000\,(1+0,065)^5 = 68\,504,33$$
$$F = \frac{50\,000}{s_{\overline{5}|0,05}} = 9\,048,74$$

Solución ejercicio 7.13

$$20\,000 = a\, a_{\overline{6}|0,05} \qquad a = 3\,940,35$$
$$C_3 = 3\,940,35\, a_{\overline{6-3}|0,05} \qquad C_3 = 10\,730,55$$
$$10\,730,55 = a\, a_{\overline{3}|0,06} \qquad a = 4\,014,40$$

Y el cuadro de amortización sería el siguiente,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					20 000,00
1	3 940,35	1 000,00	2 940,35	2 940,35	17 059,65
2	3 940,35	852,98	3 087,37	6 027,72	13 972,28
3	3 940,35	698,61	3 241,74	9 269,45	10 730,55
4	4 014,40	643,83	3 370,57	12 640,02	7 359,98
5	4 014,40	441,60	3 572,80	16 212,83	3 787,17
6	4 014,40	227,23	3 787,17	20 000,00	0,00

Solución ejercicio 7.14

$$C_0 = a\, a_{\overline{n}|i} \qquad 40\,000 = a\, a_{\overline{6}|0,06} \qquad a = 8\,134,51$$

$$I_1 = C_0\, i \qquad I_1 = 40\,000 \cdot 0,06 \qquad I_1 = 2\,400$$

$$A_1 = a - I_1 \qquad A_1 = 8\,134,51 - 2\,400 \qquad A_1 = 5\,734,51$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					40 000,00
1	8 134,51	2 400,00	5 734,51	5 734,51	34 265,49
2	8 134,51	2 055,93	6 078,58	11 813,09	28 186,92
3	8 134,51	1 691,22	6 443,29	18 256,38	21 743,63
$\vdots$					

$$A = \frac{40\,000}{6} \qquad A = 6\,666,67$$

$$I_1 = C_0\, i \qquad I_1 = 40\,000 \cdot 0,06 \qquad I_1 = 2\,400$$

$$a_1 = A + I_1 \qquad a_1 = 6\,666,67 + 2\,400 \qquad a_1 = 9\,066,67$$

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					40 000,00
1	9 066,67	2 400,00	6 666,67	6 666,67	33 333,33
2	8 666,67	2 000,00	6 666,67	13 333,33	26 666,67
3	8 266,67	1 600,00	6 666,67	19 999,98	19 999,99
$\vdots$					

Solución ejercicio 7.15

1.
$$120\,000 = a\, a_{\overline{30}|0,06} \qquad a = 8\,717,87$$

2.
$$A_3 = a - I_3 \qquad I_3 = C_2\, i \qquad C_2 = a\, a_{\overline{30-2}|0,06}$$

$$C_2 = 8\,717,87\, a_{\overline{28}|0,06} \qquad C_2 = 116\,873,20$$

$$I_3 = 116\,873,20 \cdot 0,06 \qquad I_3 = 7\,012,39$$

$$A_3 = 8\,717,87 - 7\,012,39 = 1\,705,48$$

$$A_{20} = \cdots = 4\,592,46$$

3.
$$M_{12} = C_0 \frac{s_{\overline{12}|0,06}}{s_{\overline{30}|0,06}}$$

$$M_{12} = 120\,000 \frac{16,869941}{79,058186} \qquad M_{12} = 25\,606,37$$

4.
$$I_5 = C_4\, i \qquad C_4 = a\, a_{\overline{30-4}|0,06}$$

$$C_4 = 8\,717,87\, a_{\overline{26}|0,06} \qquad C_4 = 113\,359,91$$

$$I_5 = 113\,359,91 \cdot 0,06 = 6\,801,59$$

$$I_{30} = \cdots = 493,46$$

5.
$$C_7 = a\, a_{\overline{30-7}|0,06} \qquad C_7 = 107\,259,25$$

6. El cuadro de amortización,

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
13					91 339,38
14	8 717,87	5 480,36	3 237,51	31 898,13	88 101,87
15	8 717,87	5 286,11	3 431,76	35 329,88	84 670,12
16	8 717,87	5 080,21	3 637,66	38 967,54	81 032,46
17	8 717,87	4 861,95	3 855,92	42 823,47	77 176,53
18	8 717,87	4 630,59	4 087,28	46 910,74	73 089,26

7.

$$120\,000 - 1\,200 = 8\,717,87\, a_{\overline{30}|i} \qquad \frac{118\,800}{8\,717,87} = a_{\overline{30}|i} \qquad a_{\overline{30}|i} = 13,627182$$

$$a_{\overline{30}|0,06} = 13,764831 \qquad a_{\overline{30}|0,061} = 13,618790$$

$$\frac{x-0,061}{0,06-0,061} = \frac{13,627182-13,618790}{13,764831-13,618790} \qquad \frac{x-0,061}{-0,001} = 0,057463$$

$$x = (-0,001 \cdot 0,057463) + 0,061 \qquad TAE = x = 0,060943$$

Solución ejercicio 7.16

1.

$$a = \frac{C_0}{a_{\overline{n}|i}} \qquad a = \frac{160\,000}{a_{\overline{240}|0,004167}} \qquad a = 1\,055,93$$

2.

$$M_{24} = C_0 \frac{s_{\overline{24}|0,004167}}{s_{\overline{240}|0,004167}}$$

$$M_{24} = 160\,000 \frac{25,185923}{411,033720} \qquad M_{24} = 9\,803,93$$

3.

$$I_8 = C_7\, i \qquad C_7 = a\, a_{\overline{240-7}|0,004167}$$

$$C_7 = 1\,055,93\, a_{\overline{233}|0,004167} \qquad C_7 = 157\,240,86$$

$$I_8 = 157\,240,86 \cdot 0,004167 = 655,17$$

4.

$$C_{120} = a\, a_{\overline{240-120}|0,004167}$$

$$C_{120} = 1\,055,93 \frac{1-(1+0,004167)^{-120}}{0,004167} \qquad C_{120} = 99\,554,51$$

5.

$$C_{13} = a\, a_{\overline{240-13}|0,004167}$$

$$C_{13} = 1\,055,93 \frac{1-(1+0,004167)^{-227}}{0,004167} \qquad C_{13} = 154\,811,13$$

$$a = \frac{154\,811,13}{a_{\overline{227}|0,004375}} \qquad a = 1\,077,16$$

6.

$$160\,000 - 0,0125 \cdot 160\,000 = 1\,055,93\, a_{\overline{240}|i}$$

$$a_{\overline{240}|i} = \frac{158\,000}{1\,055,93} = 149,631131$$

$$a_{\overline{240}|0,004167} = 151,525313 \qquad a_{\overline{240}|0,0043} = 149,515624$$

$$\frac{x-0,004167}{0,0043-0,004167} = \frac{149,631131-151,525313}{149,515624-151,525313}$$

$$x = (0,942525 \cdot 0,000133) + 0,004167 \qquad x = 0,004292$$

$$i = (1+0,004292)^{12} - 1 \qquad TAE = i = 0,052742 \approx 5,274\,\%$$

Solución ejercicio 7.17

$$100\,000 = a\, a_{\overline{60}|0,003333} \qquad a = 1\,841,65$$

$$C_{48} = 1\,841,65\, a_{\overline{60-48}|0,003333} \qquad C_{48} = 21\,628,33$$

Solución ejercicio 7.18

$$11\,000 = 345\, a_{\overline{36}|i} \qquad a_{\overline{36}|i} = 31,884058$$

$$a_{\overline{36}|0,005} = 32,871016 \qquad a_{\overline{36}|0,007} = 31,724659$$

$$\frac{x-0,005}{0,007-0,005} = \frac{31,884058-32,871016}{31,724659-32,871016}$$

$$x = (0,860952 \cdot 0,002) + 0,005 \qquad x = 0,006721$$

$$J^{(12)} = 0,006721 \cdot 12 = 0,080652 \approx 8,065\,\%$$

Solución ejercicio 7.19

$$i^{(12)} = (1+0,0815)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,006550$$

$$11\,000 + 320\, a_{\overline{48}|0,006550} + 25\,000\,(1+0,0815)^{-4}$$

$$11\,000 + 13\,143,03 + 18\,274,01 = 42\,417,04$$

Solución ejercicio 7.20 Calculamos la mensualidad,

$$i_{12} = \frac{0,0279}{12} = 0,002325 \qquad 20\,000 = a\, a_{\overline{36}|0,00279} \qquad a = 579,78$$

Para determinar la TAE, restamos los gastos,

$$20\,000 - 200 = 19\,800 = 579,78\, a_{\overline{36}|i_{12}}$$

Interpolamos tomando $i_1 = 0,003$ e $i_2 = 0,0038$ y obtenemos,

$$i_{12} = 0,002878 \qquad i = (1+i_{12})^{12} - 1 \qquad TAE = i = 0,035088 \approx 3,509\,\%$$

Solución ejercicio 7.21 Calculamos la mensualidad con la siguiente ecuación de equivalencia,

$$i_{12} = \frac{0,06}{12} = 0,005 \qquad 20\,000 - 6\,000 = a\, a_{\overline{36}|0,005} + 8\,000\,(1+0,005)^{-36}$$

$$14\,000 - 6\,685,16 = 32,8710\, a \qquad a = \frac{7\,314,84}{32,8710} = 222,53$$