5

Rentas financieras

5.1. Concepto de renta

En el lenguaje corriente, *renta* es una sucesión de cobros o pagos periódicos, que tienen el carácter de rendimiento de un capital (como la rentabilidad o alquiler de un inmueble, las amortizaciones de un préstamo, las aportaciones a un plan de pensiones, etc.); en matemática financiera, el concepto es muy amplio y corresponde a un conjunto de prestaciones (monetarias) con vencimientos diversos. A cada una de las prestaciones se le llama *plazo* o *término* de la renta, y llamaremos *período* al espacio de tiempo (generalmente un año) que hay entre dos prestaciones consecutivas. En cuanto al *origen* y *duración* de la renta, tienen un significado claro cuando la renta es contínua o periódica; *origen* es entonces la fecha de comienzo de las prestaciones y *duración* es el intervalo entre el principio y el final de las prestaciones. En relación con el *objeto* de las rentas, éste está íntimamente ligado al de su valoración, se trata pues de encontrar un valor de la renta en un momento determinado del tiempo. De esta forma se puede determinar: el *valor final* en un momento cualquiera no anterior al vencimiento del último término, el *valor actual* en cualquier momento no posterior al vencimiento del primer término y eventualmente el *valor* en un momento intermedio entre el primer y último vencimiento.

El cálculo del valor final requiere fijar una ley de interés, habitualmente, al tratarse de operaciones a más de un año, ésta será la del interés compuesto; el cálculo del valor actual requiere utilizar una ley de descuento, normalmente aplicaremos la del descuento racional compuesto; por último el cálculo del valor en un momento intermedio requiere precisar ambas leyes y emplearemos la del interés y el descuento racional compuesto.

Además, deberán cumplir las siguientes condiciones: los términos de la renta han de ser iguales, y si son variables la variación ha de ser conocida; los períodos de vencimiento de los términos, han de ser equidistantes, es decir, han de tener el mismo vencimiento, anual, trimestral, mensual,...

5.2. Clasificación de las rentas

Dada la gran aplicación de las rentas a problemas económicos reales se hace preciso su estudio según la clasificación y terminología clásica. Por ello, clasificaremos las rentas en los siguientes grupos:

1. Cuando las variables que intervienen en la definición de la renta se suponen conocidas con certeza, se la denomina *renta cierta*, empleando el término *renta aleatoria* cuando alguna de las variables depende del resultado de un fenómeno aleatorio.

2. Otra clasificación es la que distingue las rentas según la amplitud de sus períodos de maduración.

   Cuando todos los períodos de renta, son de amplitud finita la renta se denomina *discreta* y se da el nombre de *renta continua* a aquellas en las que todos los períodos son infinitesimales.

   Las rentas discretas, también llamadas de *período uniforme*, reciben en particular los nombres de anual, semestral, mensual,... en correspondencia con la medida del período.

3. Atendiendo a la cuantía de los términos, las rentas discretas se clasifican en *constantes* y *variables*. Dentro de las constantes, se encuentran las *rentas unitarias*, que son aquellas en las que todos los términos tienen de cuantía la unidad.

4. Teniendo en cuenta el vencimiento de los términos, clasificaremos las rentas en:

   - *rentas prepagables*, cuando todos los vencimientos coincidan con el extremo inferior del correspondiente período y
   - *rentas pospagables* o rentas con vencimiento de los términos al final de su correspondiente período.

   En las rentas prepagables el origen de la renta coincide con el vencimiento del primer término, mientras que el final de la renta será posterior al último vencimiento y por el contrario, en las rentas pospagables, el origen es anterior al vencimiento del primer capital y, sin embargo, el final coincide con el vencimiento del último término.

   Un ejemplo de renta prepagable serían los alquileres, que en general se pagan por anticipado. Como ejemplo de pospagable, los sueldos, que suelen cobrarse a período vencido.

5. Según que la duración de la renta sea finita o infinita, ésta recibirá el calificativo de *renta temporal* o *renta perpetua* respectivamente.

6. La posición del punto α de valoración de la renta, respecto al origen o final de la misma, proporciona otro criterio de clasificación. Así para $\alpha < t_0$, se dice que la renta está *diferida* en $p = t_0 - \alpha$, para $\alpha > t_n$ que está *anticipada* en $h = \alpha - t_n$; y recibe el nombre de renta *inmediata* cuando α coincide con el origen o final de la renta.

7. Finalmente, según el tipo de sistema financiero con el que se valores, se puede hablar de: rentas valoradas en capitalización compuesta, rentas valoradas en capitalización simple,...

5.3. Valor capital o financiero de una renta

En términos generales, se entiende por valor capital de una renta en un determinado momento α al valor financiero de la distribución de capital que la define.

En particular resulta interesante la determinación del valor capital o financiero de las rentas en su origen t_0 y en su final t_n. Valores que reciben los nombres específicos de *valor inicial o actual* y *valor final* de la renta respectivamente.

Gráficamente el valor actual de una renta puede verse en la figura 5.1,

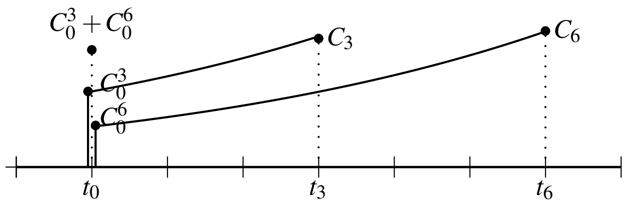

Figura 5.1: *Valor actual de una renta financiera*

Además, verifica las propiedades:

- respecto al punto de valoración, las rentas, pueden ser valoradas en cualquier punto.
- propiedad asociativa, por la que dos o más rentas pueden ser sustituidas por una única equivalente a las anteriores.
- propiedad disociativa, por la que una renta puede ser desdoblada y obtener varias rentas equivalentes a la original.

5.4. Renta constante, inmediata, pospagable y temporal

5.4.1. Valor actual

Estudiaremos inicialmente las rentas constantes inmediatas que clasificaremos según su vencimiento en pospagables y prepagables y dentro de estos en temporales y perpetuas. A este fin, éstas, son las más sencillas con valores financieros de fácil tabulación. Expresaremos las demás en función de las primeras.

Al valor actual de una renta constante temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria), lo designaremos por $a_{\overline{n}|i}$, en el que n expresa su duración en períodos y el subíndice i el tipo de interés periódico a que se evalúa. En la figura 5.2 puede verse una representación gráfica,

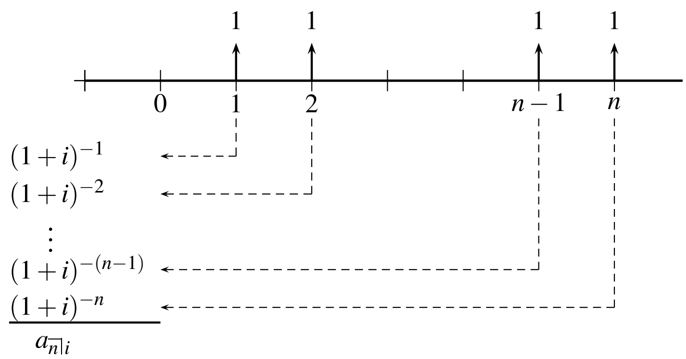

Figura 5.2: *Valor actual de una renta unitaria*

El valor actual de esta renta, lo calcularemos aplicando el principio general de equivalencia de capitales en el origen de la misma. Por tanto, recordando la expresión del valor actual de un capital C (véase 4.3 en la página 39),

$$C_0 = \frac{1}{(1+i)^n}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n}$$

expresión en la que el segundo término constituye la suma de términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{(1+i)}$, el último $\frac{1}{(1+i)^n}$ y la razón $\frac{1}{(1+i)}$.

Aplicando la expresión de la suma de los términos de una progresión geométrica (véase A.11 en la página 183),

$$S = \frac{a_n q - a_1}{q-1} \qquad a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n}\frac{1}{(1+i)} - \frac{1}{(1+i)}}{\frac{1}{(1+i)} - 1}$$

multiplicando numerador y denominador por $(1+i)$,

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{\frac{1}{(1+i)^n} - 1}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^{-n} - 1}{-i}$$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{5.1}$$

expresión que nos da el valor actual de la renta unitaria. Generalizando, el valor actual de una renta constante, temporal, inmediata y pospagable de término C, duración n períodos a interés i, y de acuerdo con (5.1), será,

$$V_0 = C\,a_{\overline{n}|i} \qquad V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{5.2}$$

■

5.4.2. Valor final

El valor final de una renta constante, temporal, inmediata, pospagable de término 1 (unitaria) lo designaremos por $s_{\overline{n}|i}$, en el que n e i corresponden a la duración y tipo de interés respectivamente.

Del mismo modo que hemos hecho para el valor actual, la obtención gráfica del valor final, sería tal como se muestra en la figura 5.3.

Igual que para la obtención del valor actual, el valor final, sería,

$$s_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^s$$

Nuevamente se trata de una suma de términos variables en progresión geométrica, esta vez creciente, de razón $(1+i)$ cuya expresión (véase A.11 en la página 183), es $S = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$, y por tanto, resulta,

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{5.3}$$

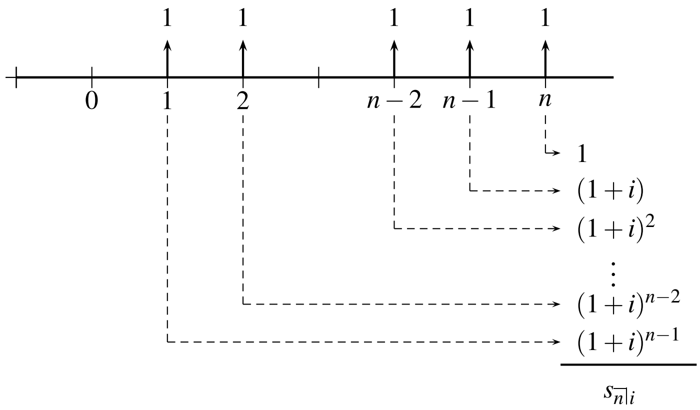

Figura 5.3: *Valor final de una renta unitaria*

Relación entre el valor actual y el valor final

Obsérvese que se verifica que capitalizando n períodos el valor actual encontramos el valor final de la renta,

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{5.4}$$

por ser $(1+i)^n$ el factor de capitalización en el intervalo $[0,n]$.

Cuando en lugar de una renta de cuantía unitaria se trate de una renta con términos de cuantía constante C, el valor final será,

$$V_n = C\,s_{\overline{n}|i} \qquad V_n = C\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad V_n = C\,a_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n \tag{5.5}$$

De la misma forma, podríamos obtener el valor actual, aplicando el descuento racional compuesto al valor final.

Ejemplo 5.1 Calcular el valor inicial y final de una renta pospagable, de 8 años de duración y término anual constante de 5 000 €, si se valora a rédito anual constante del 7 %. Comprobar también que el valor final puede obtenerse capitalizando el valor inicial.

$$\begin{aligned} V_0 &= (V_0)_{\overline{8}|0,07} = C\,a_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\,a_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\,\frac{1-(1+0,07)^{-8}}{0,07} = 5\,000 \cdot 5,9712985 = 29\,856,49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_8 &= (V_n)_{\overline{8}|0,07} = C\,s_{\overline{8}|0,07} = 5\,000\,s_{\overline{8}|0,07} \\ &= 5\,000\,\frac{(1+0,07)^8 - 1}{0,07} = 5\,000 \cdot 10,259803 = 51\,299,01 \end{aligned}$$

También se podría haber obtenido V_8 capitalizando V_0. En efecto,

$$V_8 = V_0(1+i)^8 = 29\,856,49\,(1+0,07)^8 = 29\,856,49 \cdot 1,718186 = 51\,299,01$$

Los valores de $a_{\overline{8}|0,07}$ y de $s_{\overline{8}|0,07}$ pueden obtenerse directamente utilizando tablas financieras (véase B.3 en la página 194), con una calculadora resolviendo las expresiones y con una calculadora financiera que proporcionaría el resultado de forma directa.

Utilizando la calculadora HP12c para obtener V_0,

5000 [CHS] [PMT] 8 [n] 7 [i] [PV] obteniendo 29 856,49

y para V_n,

0 [PV] [FV] en la que resulta 51 299,01

5.5. Renta constante, inmediata, prepagable y temporal

5.5.1. Valor actual

De la misma forma que hicimos en el caso de una renta pospagable, analizaremos en primer lugar la renta prepagable constante de cuantías unitarias, es decir, de término 1, asociado a los períodos $0, 1, 2, \cdots, n$.

Su valor inicial, o en 0, simbolizado por $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$ es,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \cdots + (1+i)^{-(n-1)} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s}$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) \tag{5.6}$$

■

Gráficamente podemos verlo en la figura 5.4.

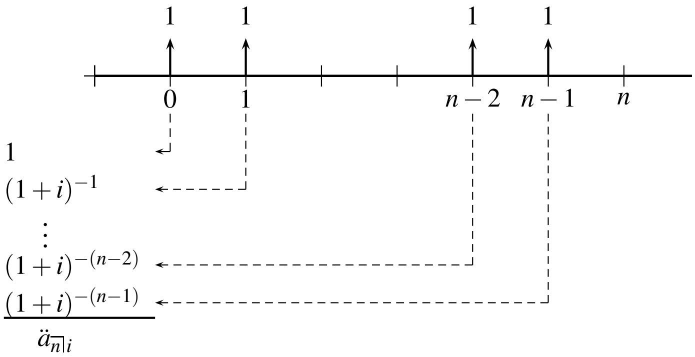

Figura 5.4: *Valor actual de una renta unitaria prepagable*

5.5.2. Valor final

El valor final o en n, representado por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, es,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^s$$

y sumando los términos de la progresión puede también escribirse,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) \tag{5.7}$$

Relación entre el valor actual y el valor final

Se verifica la relación, como ocurría en la renta pospagable,

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}\,(1+i)^n$$

Puede igualmente observarse, viendo el valor inicial y el valor final de esta renta con sus análogos en el caso de renta pospagable, que mantienen la siguiente relación,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}\,(1+i) \tag{5.8}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}\,(1+i)$$

consecuencia de ser constante el rédito periodal, lo que implica la equivalencia de las rentas prepagable unitaria, con la pospagable de cuantía constante $(1+i)$ es la que se muestra en la figura 5.5.

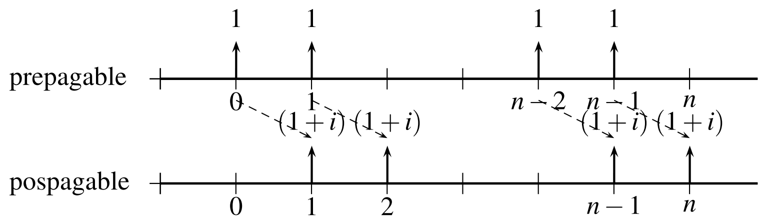

Figura 5.5: *Relación entre una renta unitaria prepagable y pospagable*

Esta relación entre prepagables y pospagables se verificará siempre que el rédito de valoración sea constante para todos los períodos, con independencia de las cuantías de los términos de la renta, ya que trasladar el vencimiento de los términos del extremo inicial de cada período al extremo final equivale a multiplicar las cuantías por $(1+i)$, factor de capitalización del período.

Al ser $i > 0$, se verificará siempre $\ddot{a}_{\overline{n}|i} > a_{\overline{n}|i}$ y $\ddot{s}_{\overline{n}|i} > s_{\overline{n}|i}$

También se obtienen de forma inmediata estas nuevas relaciones entre rentas unitarias prepagables y pospagables,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n+1}|i} - 1$$

Estas expresiones son propias de las rentas de cuantía constante, lo que permite escribir,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{-s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1}(1+i)^{-s} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{s} = 1 + \sum_{s=1}^{n-1}(1+i)^{s} = 1 + \ddot{s}_{\overline{n-1}|i}$$

y facilita los cálculos con el empleo de tablas, caluladora financiera u hoja de cálculo.

Ejemplo 5.2 Calcular el valor inicial y final de una renta de período anual, prepagable de 6 términos y cuantía constante 4 000 € valorada en capitalización compuesta de parámetro $i = 9\,\%$ anual.

Su valor inicial puede obtenerse con,

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09} = 4\,000\,\ddot{a}_{\overline{6}|0,09} = 4\,000\,(1+i)a_{\overline{6}|0,09} = 4\,000 \cdot 1,09 \cdot 4,4859185 = 19\,558,61$$

El valor final, puede obtenerse en función del valor inicial,

$$\ddot{V}_n = (\ddot{V}_0)_{\overline{6}|0,09}\,(1+0,09)^6 = 19\,558,61 \cdot 1,6771001 = 32\,801,74$$

Utilizando la calculadora financiera, $\ddot{V}_0$,

$\boxed{\text{g}}$ $\boxed{\text{BEG}}$ 6 $\boxed{\text{n}}$ 9 $\boxed{\text{i}}$ 4000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ $\boxed{\text{PV}}$ obteniendo 19 558,61

el valor de $\ddot{V}_n$, partiendo de los datos anteriores,

0 $\boxed{\text{PV}}$ $\boxed{\text{FV}}$ presentado el resultado de 32 801,74

5.6. Rentas perpetuas

5.6.1. Valor actual

En primer lugar analizaremos el supuesto de renta perpetua pospagable y unitaria. El esquema se corresponde con el del valor actual de una renta pospagable unitaria en el que el tiempo es perpetuo.

Su valor actual,valorado a rédito constante i, lo representamos por $a_{\overline{\infty}|i}$ y vendrá dado por la suma de una serie geométrica, que es convergente por ser $(1+i)^{-1} < 1$,

$$a_{\overline{\infty}|i} = \sum_{s=1}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \tag{5.9}$$

■

Este valor $a_{\overline{\infty}|i}$, se puede interpretar como la cuantía, tal que sus intereses periodales son la unidad ya que,

$$a_{\overline{\infty}|i}\, i = 1$$

En el caso de que la renta perpetua unitaria sea prepagable, su valor actual, será,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} &= \sum_{s=0}^{\infty}(1+i)^{-s} = \lim_{n\to\infty}\sum_{s=0}^{n}(1+i)^{-s} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = 1+\frac{1}{i}\end{aligned} \tag{5.10}$$

■

Entre $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$ y $a_{\overline{\infty}|i}$ se verifican, por tanto, las mismas relaciones que entre los valores actuales de las rentas temporales prepagable y pospagable, es decir,

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}\,(1+i) \qquad\qquad \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} + 1$$

No tiene sentido hablar de valor final de rentas perpetuas, pues las series que los representan son divergentes. Recuérdese que una renta es convergente cuando la razón de la progresión es $q < 1$. En el valor final, $q > 1$ ya que $(1+i) > 1$ y por tanto, es divergente.

El valor actual de una renta perpetua de términos de cuantía constante C, será, en el supuesto de una renta pospagable,

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,a_{\overline{\infty}|i} = \frac{C}{i}$$

y en el de prepagable,

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = C\left(1+\frac{1}{i}\right)$$

Ejemplo 5.3 Obtener el valor actual de una renta perpetua con términos anuales de cuantía constante $C = 4\,500$ valorada a un tipo de interés del 6 %, tanto en el caso de que fuera pospagable como prepagable.

En la opción de términos pospagables,

$$V_0 = (V_0)_{\overline{\infty}|0{,}06} = C\,a_{\overline{\infty}|0{,}06} = 4\,500\,\frac{1}{0{,}06} = 75\,000$$

Si se trata de prepagable,

$$\ddot{V}_0 = (\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|0{,}06} = C\,\ddot{a}_{\overline{\infty}|0{,}06} = 4\,500\,\frac{1+0{,}06}{0{,}06} = 79\,500$$

5.7. Rentas diferidas en p períodos de rédito constante

Las rentas se denominan diferidas cuando el momento de valoración α es anterior al origen de la renta.

Si suponemos que el diferimiento coincide con un número entero p de períodos de rédito constante i, para cada uno de los diversos tipos de rentas unitarias tratadas anteriormente, se obtienen los siguientes resultados.

5.7.1. Valor actual

El valor actual, representado por ${}_{p}/a_{\overline{n}|i}$ es el que se calcula en el momento 0, comenzándose a recibir o entregar a partir del momento $p+1$. En la figura 5.6 vemos un esquema representativo.

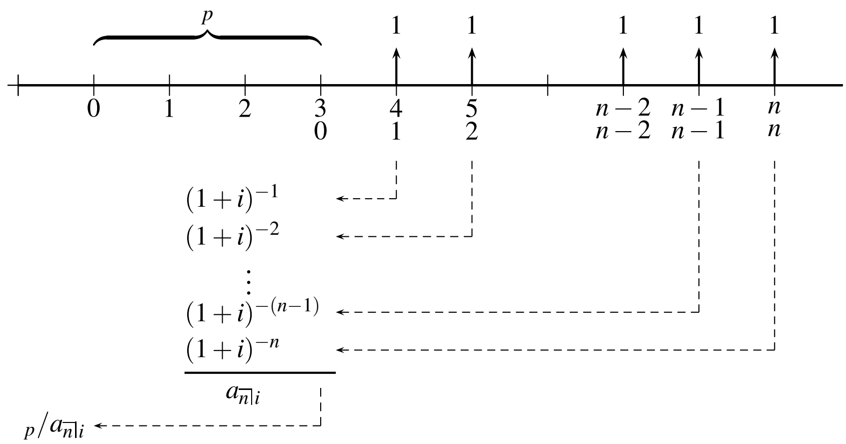

Figura 5.6: *Valor actual de una renta unitaria diferida*

Y podemos expresarlo como,

$$
{}_{p}/a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p} \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = (1+i)^{-p} a_{\overline{n}|i} \tag{5.11}
$$

A efectos operativos es interesante expresar la renta diferida como la diferencia de dos rentas inmediatas,

$$
{}_{p}/a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-(p+s)} = \sum_{s=1}^{n+p} (1+i)^{-s} - \sum_{s=1}^{p} (1+i)^{-s}
$$

de la que se obtiene,

$$
{}_{p}/a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{p}|i}
$$

Si se trata del valor actual prepagable, su valor actual, será,

$$
{}_{p}/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-(p+s)} = (1+i)^{-p} \sum_{s=0)}^{n-1} (1+i)^{-s} = (1+i)^{-p} \ddot{a}_{\overline{n}|i} \tag{5.12}
$$

que también podemos expresar como,

$$
{}_{p}/\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{p+n}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i}
$$

En el supuesto de que la renta sea perpetua en lugar de temporal, el valor actual, se obtendría,

$$
{}_{p}/a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_{p}/a_{\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} (1+i)^{-p} a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p} \frac{1}{i} \tag{5.13}
$$

Que también podrá obtenerse como,

$$_{p/}a_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i} - a_{\overline{p}|i}$$

Si la renta diferida es prepagable y perpetua,

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-p+1}\frac{1}{i}$$

y también,

$$_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} - \ddot{a}_{\overline{p}|i}$$

Si las rentas no son unitarias, sino de cuantía C,

$$_{p/}(V_0)_{\overline{n}|i} = C\, {}_{p/}a_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_{p/}(V_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, {}_{p/}a_{\overline{\infty}|i}$$

si es prepagable,

$$_{p/}(\ddot{V}_0)_{\overline{n}|i} = C\, {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{n}|i} \text{ y si es perpetua } {}_{p/}(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}|i} = C\, {}_{p/}\ddot{a}_{\overline{\infty}|i}$$

Al valor final de una renta diferida en p períodos no le afecta el diferimiento ya que,

$$_{p/}s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}\, {}_{p/}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n+p}(1+i)^{-p}a_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}$$

Ejemplo 5.4 Calcular el valor actual de una renta prepagable de cuantía anual constante de 2 000 € diferida 3 años y de 4 de duración, si la valoración se hace a un tipo de interés del 6 %

$$_{3/}(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0,06} = 2\,000 \cdot 3,673012 \cdot 0,839619 = 6\,167,86$$

o como diferencia de rentas siendo,

$$_{3/}\ddot{a}_{\overline{4}|0,06} = \ddot{a}_{\overline{7}|0,06} - \ddot{a}_{\overline{3}|0,06} = 3,083932$$

$$_{3/}(\ddot{V}_0)_{\overline{4}|0,06} = 2\,000 \cdot 3,083932 = 6\,167,86$$

Utilizando la calculadora financiera, $\ddot{V}_0$,

g BEG 4 n 6 i 2000 CHS PMT PV obteniendo 7 346,02

y para obtener $_{3/}(\ddot{V}_0)$,

STO FV 0 PMT 3 n PV que da como resultado 6 167,86

5.8. Rentas anticipadas en h períodos con rédito constante

En este caso, se trata de rentas valoradas en un momento α que se encuentra h períodos posterior al final de la renta.

Si se trata de una renta anticipada y pospagable, el valor de la renta en $\alpha = t_{n+h}$, representado por $_{h/}s_{\overline{n}|i}$ viene dado por la expresión,

$$_{h/}s_{\overline{n}|i} = \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=0}^{n-1}(1+i)^s = (1+i)^h s_{\overline{n}|i} \tag{5.14}$$

Si se trata de una renta prepagable y anticipada, y que tiene como valor en $\alpha = t_{n+h}$,

$$_{h/}\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n}(1+i)^{h+s} = (1+i)^h \sum_{s=1}^{n}(1+i)^s = (1+i)^h \ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{h+1} s_{\overline{n}|i} \tag{5.15}$$

Ejemplo 5.5 Determinar el valor al final de nueve años de una renta pagadera por años vencidos, de cuantía anual constante de 30 000 € de siete términos, sabiendo que el rédito anual es del 6 %

$${}_{2/}(V_n)_{\overline{7}|0,06} = 30\,000\,(1+0,06)^2 s_{\overline{7}|0,06} = 282\,939,48$$

Utilizando la calculadora financiera, V_n,

7 $\boxed{\text{n}}$ 6 $\boxed{\text{i}}$ 30000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ $\boxed{\text{FV}}$ obteniendo 251 815,13

y para obtener ${}_{2/}(V_n)$,

$\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 0 $\boxed{\text{PMT}}$ 2 $\boxed{\text{n}}$ $\boxed{\text{FV}}$ que da como resultado 282 939,48

5.9. Determinación de n e i en las rentas unitarias de rédito constante

La utilización generalizada de las rentas unitarias hace conveniente su estudio analítico de los valores financieros principalmente inicial y final como función de sus variables básicas n e i.

5.9.1. Estudio del valor actual como función de n

La variable n se refiere al número de términos de la renta y por tanto, pertenece a los números naturales, $n \in \mathbb{N}$.

La función de n, que representa $a_{\overline{n}|i}$, es,

$$\varphi_1(n) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Esta función es creciente cuanto mayor sea el número de términos. Para $n = 0$ toma el valor $\varphi_1(0) = 0$, y está acotada por,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_1(n) = a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

Si ampliamos la función al campo real positivo haciendo $n = x \wedge x \in \mathbb{R}$, viendo la primera y segunda derivada podríamos decir que la función es creciente y cóncava tal como se muestra en el gráfico 5.7.

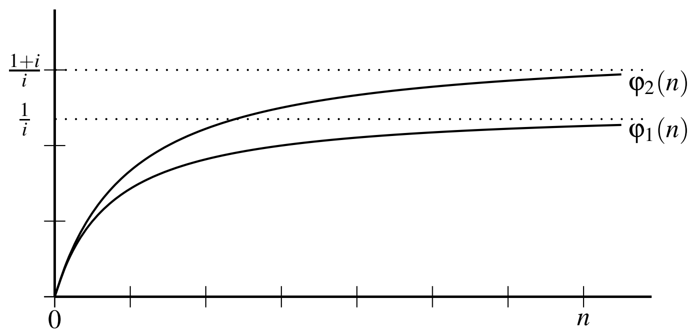

Figura 5.7: *Estudio de n*

La determinación del valor de n, se haría a través de las tablas financieras, interpolando en su caso (véase A.4 en la página 179), por tanteos o tomando logaritmos. La utilización de una calculadora financiera u hoja de cálculo, facilitan la labor.

Ejemplo 5.6 Determinar el número de años de una renta cuyo valor actual es de 45 032 €, sus términos pospagables de 4 000 € y el tipo de interés del 8 %

$$45\,032 = 4\,000\, a_{\overline{n}|0,08} \qquad \frac{45\,032}{4\,000} = \frac{1-(1+0,08)^{-n}}{0,08}$$

$$0,900640 = 1 - \frac{1}{1,08^n} \qquad \frac{1}{1,08^n} = 1 - 0,900640$$

$$1,08^n = \frac{1}{0,099360} \qquad n \log 1,08 = \log 10,064412 \qquad n = 30$$

Con la calculadora financiera, para obtener n,

45032 [PV] 4000 [CHS] [PMT] 8 [i] [n] obteniendo 30

Si obtenemos el valor con las tablas financieras, encontramos en la columna del 8 % el valor de $a_{\overline{n}|0,08} = 11,2580$ en la fila correspondiente a $n = 30$.

5.9.2. Estudio del valor actual como función de i

El valor actual de una renta unitaria pospagable, es,

$$\varphi_1(i) = a_{\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} (1+i)^{-s} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Obteniendo la primera y segunda derivada,

$$\varphi_1'(i) = \sum_{s=1}^{n} (-s)(1+i)^{-(s+1)} < 0 \rightarrow \varphi_1(i) \text{ decreciente}$$

$$\varphi_1''(i) = \sum_{s=1}^{n} s(s+1)(1+i)^{-(s+2)} > 0 \rightarrow \varphi_1(i) \text{ convexa}$$

los valores de $\varphi_1(i)$ en los extremos, son,

$$\varphi_1(0) = n \qquad \text{y} \qquad \lim_{i \to x} \varphi_1(i) = 0$$

resumiendo, $\varphi_1(i)$ es decreciente y convexa, corta al eje de ordenadas y en el punto $(0,n)$ y tiene como asíntota el eje positivo de x (abcisas).

Si se trata de una renta prepagable, operando de la misma forma, veríamos que se trata igualmente de una función decreciente y convexa en la que la asíntota, sería,

$$\lim_{i \to \infty} \varphi_2(i) = \lim_{i \to \infty} \sum_{s=0}^{n-1} (1+i)^{-s} = 1$$

y su representación gráfica tal como se muestra en la figura 5.8.

La obtención del valor de i, se puede hacer utilizando un método de tanteo o mediante una aproximación de Taylor que nos permita obtener un valor inicial suficientemente aproximado. Tambien, con el empleo de las tablas financieras e interpolando (véase A.4 en la página 179) en su caso. Igualmente, el empleo de una calculadora financiera u hoja de cálculo facilitará la tarea.

Utilizando Taylor, si denominamos i_0 a ese primer valor estimado, partiendo de la ecuación general (5.2) en la página 58,

$$V_0 = C\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

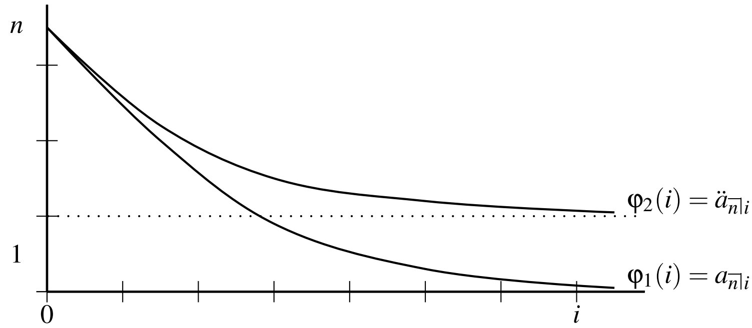

Figura 5.8: *Estudio de i*

Desarrollando en serie $(1+i)^{-n}$ los dos primeros términos por Taylor,

$$(1+i)^{-n} \approx 1 - n\,i + \frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2$$

$$V_0 = C\,\frac{1-\left(1-n\,i+\frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2\right)}{i} \qquad V_0 = C\,\frac{n\,i-\frac{n\,(n+1)}{2}\,i^2}{i}$$

dividiendo por i,

$$V_0 = C\left(n - \frac{n\,(n+1)}{2}\,i\right) \qquad V_0 = C\,n - \frac{C\,n\,(n+1)}{2}\,i$$

factorizando el denominador y dividiendo entre n, obtenemos una aproximación o fórmula heurística de i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{C-\frac{V_0}{n}}{\frac{V_0}{n}+V_0} \tag{5.16}$$

y si generalizamos la ecuación contemplando V_n y las opciones de pospagable o prepagable,

$$i_0 = 2\,\frac{\frac{V_0-V_n}{n}-C}{(V_n-V_0)-\mu\left(\frac{V_0-V_n}{n}\right)} \tag{5.17}$$

siendo $\mu = -1$ si la operación es prepagable y $\mu = 1$ si se trata de pospagable.

Ejemplo 5.7 Al adquirir un vehículo por 24 000 € nos proponen pagar durante 6 años una renta de 5 390 € anuales. ¿A qué tipo de interés se ha realizado la operación?

$$24\,000 = 5\,390\,a_{\overline{6}|i}$$

$$a_{\overline{6}|i} = \frac{24\,000}{5\,390} = 4{,}452690$$

Si utilizamos el método heurístico de (5.16) para el cálculo del primer valor i_0,

$$i_0 = 2\,\frac{5\,390-\frac{24\,000}{6}}{\frac{24\,000}{6}+24\,000} \qquad i_0 = 0{,}099286 \approx 9{,}929\,\%$$

que es un valor aproximado al real. Podemos utilizarlo como primer valor o valor estimado de i.

Por interpolación, si buscamos los valores en las tablas, obtenemos,

$$a_{\overline{6}|0,09} = 4,485919 \qquad a_{\overline{6}|0,10} = 4,355261$$

e interpolando,

$$\frac{4,452690 - 4,485919}{4,355261 - 4,485919} = \frac{x - 0,09}{0,1 - 0,09}$$

$$\frac{0,033229}{0,130658} = \frac{x - 0,09}{0,01}$$

$$x = 0,092543 \approx 9,254\,\%$$

Con la calculadora, el cálculo de i sería,

6 $\boxed{\text{n}}$ 24000 $\boxed{\text{PV}}$ 5390 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PMT}}$ $\boxed{\text{i}}$ obteniendo 9,250 %

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1 Qué cantidad depositaremos en un banco que opera al 7 % de interés compuesto anual, para percibir al final de cada año y durante 10 años una renta de 10 000 €.

Solución: $V_0 = 70\,235,82$

Ejercicio 5.2 Calcular la anualidad necesaria para amortizar en 10 años una deuda que en el momento actual asciende a 100 000 €, si la operación ha sido estipulada al 6 % de interés compuesto anual, y los pagos se realizan al final de cada año.

Solución: $C = 13\,586,80$

Ejercicio 5.3 Para adquirir un piso el señor A ofrece 500 000 € al contado, el señor B 100 000 € en el acto de la firma de contrato y 40 000 € anuales durante 20 años y el señor C, 40 000 € anuales durante 30 años verificando el primer pago al concertar el contrato. Supuesto un tipo de interés del 6 %, ¿qué oferta es la más conveniente para el vendedor?

Solución: C

Ejercicio 5.4 Mediante la entrega de 5 000 € al término de cada año y durante 12, queremos constituir un capital que nos permita percibir durante los 20 años siguientes una renta. Calcular el término de la misma, si la operación se realiza al tanto de evaluación del 7 %.

Solución: $C = 8\,442,72$

Ejercicio 5.5 Se compra una casa en 400 000 € destinada a alquiler y a la que se concede una vida útil de 20 años. Pero sobre la finca se grava un censo de 780 € anuales. ¿Cuál debe ser el precio del alquiler anual para que el capital invertido en su adquisición rinda un 5 %?

Solución: $C = 31\,311,46$

Ejercicio 5.6 Se imponen 5 000 € al principio de cada año en una entidad bancaria que abona un 7 % anual compuesto. Después de realizadas 15 imposiciones y al año de la última imposición comienzan a retirarse 5 000 € durante 15 años. ¿Cuál será el saldo en el momento de retirar la última anualidad?

Solución: Saldo $= 245\,279,83$

Ejercicio 5.7 El valor actual de una renta de 10 000 € anuales pospagables es de 98 181,47 €. Si hubiese sido prepagable, el valor actual sería de 106 081,47 €. Calcular el tanto y el tiempo.

Solución: $i = 0,08 \qquad n = 20$

Ejercicio 5.8 Se imponen durante n años anualidades vencidas de 15 000 € al 5 %, al objeto de recibir durante los $2n$ años siguientes, y también por años vencidos, una renta anual de 10 000 €. Determinar el valor de n.

Solución: $n = 4$

Ejercicio 5.9 Una persona ha dedicado anualmente 15 000 € a la amortización de una deuda de 125 000 € que contrajo hace 10 años, siendo el tipo de interés del 10 %. Habiendo decidido hoy liquidar el resto de su deuda, ¿cuál será la cantidad que deberá abonar ahora, además de la anualidad?

Solución: Saldo $= 85\,156{,}44$

Ejercicio 5.10 Determinar el valor final de una renta de 10 000 € anuales que se van ingresando en una institución financiera durante 8 años, sabiendo que dicha institución utiliza un tanto de valoración del 3,50 % durante los tres primeros años y un 4 % durante los siguientes.

Solución: $V_n = 91\,955{,}20$

Ejercicio 5.11 Un club deportivo compra terrenos adicionales por un valor de 230 000 € pagando 80 000 € al contado y comprometiéndose a pagar el resto en seis pagos anuales iguales. ¿Cuál deberá ser el importe anual de cada pago si el tipo de interés pactado es el 10 % anual?

Solución: $C = 34\,441{,}11$

Ejercicio 5.12 ¿Cuál es el valor de una casa por la que se piden 50 000 € al contado, más veinte anualidades de 30 000 € cada una si se estiman los intereses al 6 %?

Solución: $V_0 = 394\,097{,}64$

Ejercicio 5.13 El valor actual de una renta perpetua prepagable de 6 000 € es de 106 000 €. ¿Cuál es el tanto de interés de valoración?

Solución: $i = 0{,}06$

Ejercicio 5.14 Mediante la entrega de 35 000 € al término de cada año y durante 11 se pretende constituir un capital que permita percibir durante los 20 años siguientes una renta constante. Calcular el término de la misma si la operación se evalúa al tanto anual del 6 %

Solución: $C = 45\,685{,}36$

Ejercicio 5.15 Al objeto de que su hijo, de catorce años de edad, reciba al alcanzar los veintitres la suma de 100 000 €, el señor X desea saber la cuantía que debe entregar al final de cada año en una entidad bancaria que computa intereses al 3,50 % para este tipo de depósitos. Después del quinto año, el banco eleva el interés al 4 %. Se pide:

1. Anualidad inicial que debe entregar el señor X,
2. Nueva anualidad después de la subida del tanto para obtener la misma suma de 100 000 €,
3. Cuantía que podría retirar el hijo si se continuasen depositando los mismos importes.

Solución: 1. $C = 9\,644{,}60$ 2. $C = 9\,300{,}98$ 3. $V_n = 101\,459{,}16$

Ejercicio 5.16 Hallar el valor actual de una renta pospagable de 10 pagos, anualidad de 10 000 € y tanto de valoración del 5 % sabiendo que comenzaremos a devengarla dentro de 5 años.

Solución: $V_0 = 60\,501{,}81$

Ejercicio 5.17 Durante 5 años y al final de cada uno, se ingresan 7 000 € en un banco que opera al 4 % anual. ¿Qué capital se habrá constituido al final del noveno año?

Solución: $V_n = 44\,354{,}32$

Ejercicio 5.18 Compramos una maquinaria por 20 000 €, a pagar en 15 anualidades, realizándose el primer pago a los 3 años. Determinar la anualidad si el tanto de valoración es del 6 %.

Solución: $C = 2452,61$

Ejercicio 5.19 Una entidad financiera presta a una empresa 300 000 €, y ésta se compromete a reintegrarlos junto con sus intereses mediante 12 anualidades iguales que hará efectivas al final de cada año. Si la capitalización es compuesta y los tantos que aplica la entidad financiera son: 6 % para los 4 primeros años, 7 % para los 5 siguientes, y el 8 % para los tres últimos, determinar el valor de la anualidad.

Solución: $C = 36727,50$

Ejercicio 5.20 Una persona compra un piso entregando 40 000 € a la firma del contrato y 10 000 € al final de cada uno de los próximos 15 años. Si la entidad hipotecaria le aplica un tanto del 4 % durante los primeros 7 años y un 5 % durante el resto de la operación, se pide determinar el valor del piso.

Solución: $V_0 = 149\,135,65$

Ejercicio 5.21 Una renta de cuantía anual constante de 3 500 €, diferida en cinco años se valora a rédito constante del 5 %. Se desea saber su valor actual en los supuestos de considerarla pospagable y con una duración de 10 años o en el de que sea prepagable y perpetua.

Solución: $V_0 = 21\,175,63$ $\quad \ddot{V}_0 = 57\,589,17$

Ejercicio 5.22 Determinar el valor en estos momentos, de una renta cuya cuantía anual constante es de 1 500 € si el tipo de interés es del 5 % anual y comenzó a devengarse hace 12 años en el supuesto de que sea pospagable y de 10 términos.

Solución: $V_n = 20\,800,69$

Ejercicio 5.23 Se quiere cancelar una deuda de 14 752 € mediante el abono de una renta al final de cada año de 3 000 € si el tanto de valoración es del 6 %, ¿cuál será el número de pagos a realizar?

Solución: $n = 6$

Ejercicio 5.24 Sabiendo que el valor actual de una renta pospagable de 6 términos de 2 500 € cada uno es de 11 916 € determinar el tipo de interés a que ha sido evaluada.

Solución: $i = 0,07$

Ejercicio 5.25 Recibimos de una entidad financiera una cantidad de 50 000 € a devolver juntamente con sus intereses, mediante diez entregas iguales al final de cada año. La entidad nos exige un tipo de interés que va en aumento y que es del 5 % para los tres primeros años, el 6 % para los tres siguientes y el 7 % para los cuatro últimos. ¿Cuál será el valor de la anualidad constante?

Solución: $C = 6\,676,44$

Ejercicio 5.26 Calcular la cuantía anual necesaria para al final de 8 años disponer, en un banco que opera al 6 % de interés anual de un capital de 15 000 €

Solución: $C = 1\,515,54$

Ejercicio 5.27 Un piso, puede ser comprado haciendo uso de una de las tres siguientes opciones:

1. Pago al contado de 300 000 €
2. Abono de 375 000 € dentro de 5 años.

3. Un pago anual de 32 000 € durante 15 años siendo el primer pago en el momento de la firma del contrato.

Para la valoración consideramos el tipo de interés vigente en el momento del 6 %. Determinar la opción más favorable para el comprador.

Solución: 2.

Ejercicio 5.28 Para el pago de una compra de 4 500 € nos ofrecen pagar durante 10 años 575,75 €. Determinar el tipo de interés al que se ha realizado la operación.

Solución: $i = 0,0475$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 5.1

$$V_0 = C a_{\overline{n}|i} \qquad V_0 = 10\,000 a_{\overline{10}|0,07}$$

$$V_0 = 10\,000 \frac{1-(1+0,07)^{-10}}{0,07} \qquad V_0 = 70\,235,82$$

Solución ejercicio 5.2

$$V_0 = C a_{\overline{n}|i} \qquad 100\,000 = C a_{\overline{10}|0,06}$$

$$C = \frac{100\,000}{\frac{1-(1+0,06)^{-10}}{0,06}} \qquad C = 13\,586,80$$

Solución ejercicio 5.3

$$V_0 = C a_{\overline{n}|i}$$

En el primer caso, el valor está en el origen $\quad A = 500\,000,00$

$$B = 100\,000 + 40\,000 \frac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06} \qquad B = 558\,796,85$$

$$C = 40\,000 \frac{1-(1+0,06)^{-30}}{0,06}(1+0,06) \qquad C = 583\,628,84$$

Solución ejercicio 5.4

$$5\,000 s_{\overline{12}|0,07} = C a_{\overline{20}|0,07} \qquad 5\,000 \frac{(1+0,07)^{12}-1}{0,07} = C \frac{1-(1+0,07)^{-20}}{0,07}$$

$$89\,442,26 = 10,594014 C \qquad C = \frac{89\,442,26}{10,594014} \qquad C = 8\,442,72$$

Solución ejercicio 5.5

$$400\,000 = C \ddot{a}_{\overline{20}|0,05} - 780 a_{\overline{20}|0,05} \qquad 400\,000 = 13,085321 C - 9\,720,52$$

$$C = \frac{409\,720,52}{13,085321} \qquad C = 31\,311,46$$

Solución ejercicio 5.6

$$S = 5\,000 \ddot{s}_{\overline{15}|0,07}(1+0,07)^{15} - 5\,000 s_{\overline{15}|0,07}$$

$$S = 370\,924,94 - 125\,645,11 \qquad S = 245\,279,83$$

Solución ejercicio 5.7

$$\left.\begin{aligned} 98\,181,47 &= 10\,000 a_{\overline{n}|i} \\ 106\,081,47 &= 10\,000 a_{\overline{n}|i}(1+i) \end{aligned}\right\}$$

1. Para calcular i,

$$106\,081,47 = 98\,181,47(1+i) \qquad 106\,081,47 = 98\,181,47 + 98\,181,47 i$$

$$i = \frac{106\,081,47 - 98\,181,47}{98\,181,47} \qquad i = 0,08$$

2. Para obtener el valor de n,

$$98\,181,47 = 10\,000\,a_{\overline{n}|0,08} \qquad a_{\overline{n}|0,08} = \frac{98\,181,47}{10\,000} = 9,8181$$

Utilizando las tablas financieras obtendríamos directamente el valor de $n = 20$. Desde la ecuación,

$$9,818147 = \frac{1-(1+0,08)^{-n}}{0,08} \qquad -9,818147 \cdot 0,08 + 1 = 1,08^{-n}$$

$$0,214548 = \frac{1}{1,08^n} \qquad \frac{1}{0,214548} = 1,08^n$$

$$4,660956 = 1,08^n \qquad \log 4,66956 = n \log 1,08 \qquad n = 20 \text{ años.}$$

Solución ejercicio 5.8

$$15\,000\,s_{\overline{n}|0,05} = 10\,000\,a_{\overline{2n}|0,05}$$

$$15\,000\frac{(1+0,05)^n-1}{0,05} = 10\,000\frac{1-(1+0,05)^{-2n}}{0,05}$$

$$\text{si } x = 1,05^n$$

$$15\,000\frac{x-1}{0,05} = 10\,000\frac{1-x^{-2}}{0,05} \text{ y reduciendo,}$$

$$3\,(x-1) = 2\,(1-x^{-2})\frac{x^2}{x^2} \qquad 3\,(x-1) = \frac{2\,(x^2-1)}{x^2}$$

$$3\,(x-1) = \frac{2\,(x+1)(x-1)}{x^2} \qquad 3x^2 = 2(x+1)$$

$$3x^2 - 2x - 2 = 0 \qquad x = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{6} = 1,215204$$

$$1,05^n = 1,215204 \qquad n = \frac{\log 1,215204}{\log 1,05} \qquad n = 4$$

Solución ejercicio 5.9

$$S = 125\,000\,(1+0,1)^{10} - 15\,000 s_{\overline{10}|0,1}$$

$$S = 324\,217,81 - 239\,061,37 \qquad S = 85\,156,44$$

Solución ejercicio 5.10

$$V_n = 10\,000\,s_{\overline{3}|0,035}(1+0,04)^5 + 10\,000\,s_{\overline{5}|0,04} \qquad V_n = 91\,955,20$$

Solución ejercicio 5.11

$$230\,000 - 80\,000 = C\,a_{\overline{6}|0,1} \qquad C = 34\,441,11$$

Solución ejercicio 5.12

$$V_0 - 50\,000 = 30\,000\,a_{\overline{20}|0,06} \qquad V_0 = 394\,097,64$$

Solución ejercicio 5.13

$$106\,000 = 6\,000\left(1+\frac{1}{i}\right) \qquad 106\,000 = 6\,000 + \frac{6\,000}{i}$$

$$100\,000\,i = 6\,000 \qquad i = \frac{6\,000}{100\,000} \qquad i = 0,06$$

Solución ejercicio 5.14

$$35\,000 s_{\overline{11}|0,06} = C\, a_{\overline{20}|0,06}$$

$$524\,007,49 = C\, a_{\overline{20}|0,06} \qquad C = 45\,685,36$$

Solución ejercicio 5.15

1. La anualidad inicial,

$$C\, s_{\overline{9}|0,035} = 100\,000 \qquad C = 9\,644,60$$

2. Nueva anualidad tras el aumento de i,

$$9\,644,60 s_{\overline{5}|0,035}(1+0,04)^4 + C\, s_{\overline{4}|0,04} = 100\,000$$

$$60\,503,73 + 4,246464C = 100\,000 \qquad C = 9\,300,98$$

3. Cuantía al final,

$$9\,644,60 s_{\overline{5}|0,035}(1+0,04)^4 + 9\,644,60 s_{\overline{4}|0,04} = 101\,459,18$$

Solución ejercicio 5.16

$$V_0 = 10\,000 a_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^{-5} \qquad V_0 = 60\,501,81$$

Solución ejercicio 5.17

$$V_n = 7\,000 s_{\overline{5}|0,04}(1+0,04)^4 \qquad V_n = 44\,354,32$$

Solución ejercicio 5.18

$$20\,000 = C\, a_{\overline{15}|0,06}(1+0,06)^{-3} \qquad C = 2\,452,61$$

Solución ejercicio 5.19

$$300\,000 = C\left[a_{\overline{4}|0,06} + a_{\overline{5}|0,07}(1+0,06)^{-4} + a_{\overline{3}|0,08}(1+0,07)^{-5}(1+0,06)^{-4}\right]$$

$$C = 36\,727,50$$

Solución ejercicio 5.20

$$V_0 = 40\,000 + 10\,000 a_{\overline{7}|0,04} + 10\,000 a_{\overline{8}|0,05}(1+0,04)^{-7}$$

$$V_0 = 149\,135,65$$

Solución ejercicio 5.21

$$V_0 = 3\,500 a_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^{-5} \qquad V_0 = 21\,175,63$$

$$\ddot{V}_0 = 3\,500 \ddot{a}_{\overline{\infty}|0,05} \qquad 3\,500 \frac{1+0,05}{0,05}(1+0,05)^{-5} \qquad \ddot{V}_0 = 57\,589,17$$

Solución ejercicio 5.22

$$V_n = 1\,500 s_{\overline{10}|0,05}(1+0,05)^2 \qquad V_n = 20\,800,19$$

Solución ejercicio 5.23 Podemos resolverlo utilizando una calculadora financiera, tablas financieras o estimando el valor.

$$14\,752 = 3\,000\, a_{\overline{n}|0,06} \qquad a_{\overline{n}|0,06} = \frac{14\,752}{3\,000} = 4,917333$$

Viendo en la tabla B.3 de la página 194, vemos que en la columna del $0,06$, encontramos el valor $4,9173$ al que le corresponde un $n = 6$.

Si preferimos aplicar logaritmos para obtener la solución, el valor de n, sería,

$$\frac{1-(1+0,06)^{-n}}{0,06} = 4,917333 \qquad 1,06^{-n} = 1 - 4,917333 \cdot 0,06$$

$$1,06^{-n} = 0,704960 \qquad -n \log 1,06 = \log 0,704960$$

$$-n = \frac{\log 0,704960}{\log 1,06} \qquad n = 6$$

Solución ejercicio 5.24 Utilizando una calculadora financiera, tablas financieras o estimando el valor,

$$11\,916 = 2\,500\, a_{\overline{6}|i} \qquad a_{\overline{6}|i} = \frac{11\,916}{2\,500} = 4,766400$$

Mirando en la tabla B.3 de la página 194, observamos que en la fila del tiempo $n = 6$, el valor $4,7664$ se corresponde a un $i = 0,07$.

Solución ejercicio 5.25

$$50\,000 = C\left[a_{\overline{3}|0,05} + a_{\overline{3}|0,06}(1+0,05)^{-3} + a_{\overline{4}|0,07}(1+0,06)^{-3}(1+0,05)^{-3}\right]$$

$$C = 6\,676,44$$

Solución ejercicio 5.26

$$15\,000 = C\, s_{\overline{8}|0,06} \qquad C = 1\,515,54$$

Solución ejercicio 5.27 Planteamos las tres opciones:

1. Al contado, $V_0 = 300\,000$
2. Aplicamos la capitalización compuesta para determinar el valor actual,

$$V_0 = 375\,000\,(1+0,06)^{-5} \qquad V_0 = 280\,221,81$$

3. Obteniendo $\ddot{V}_0$,

$$\ddot{V}_0 = 32\,000\, \ddot{a}_{\overline{15}|0,06} \qquad \ddot{V}_0 = 329\,439,49$$

por lo que elegimos la 2.ª opción al ser la de mayor valor.

Solución ejercicio 5.28 El cálculo de i debemos hacerlo utilizando una calculadora financiera, tablas o interpolación. Con la calculadora, el valor de i,

$$4\,500 = 575,75\, a_{\overline{10}|i} \qquad i = 0,0475$$

Si utilizamos las tablas B.3 de la página 194, vemos que en la fila de $n = 10$, el valor de $a_{\overline{10}|i}$ que buscamos obtenido como cociente de la ecuación,

$$a_{\overline{10}|i} = \frac{4\,500}{575,75} = 7,815892$$

se encuentra entre el valor de $i = 0,04$ e $i = 0,05$. Por tanto, debemos interpolar entre estos,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad \frac{7,815892-8,1109}{7,7217-8,1109} = \frac{y-0,04}{0,05-0,04}$$

$$0,757986 \cdot 0,01 + 0,04 = y \qquad y = 0,047580$$

por lo que el valor obtenido de la interpolación, sería $i = 0,047580$.