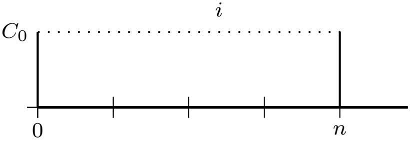
Gestión Financiera.
4 > Capitalización y descuento compuesto

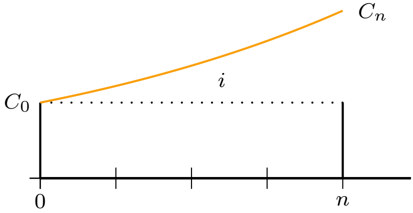
Juan Carlos Mira Navarro

Se denomina así, a la operación financiera según la cual los intereses producidos por un capital en cada periodo se agregan al capital para calcular los intereses del periodo siguiente y así sucesivamente hasta el momento de cierre de la operación financiera.

La *capitalización compuesta* o interés compuesto, es una operación financiera generalmente a largo plazo (con una duración superior al año) en la que los intereses se acumulan al capital al final de cada periodo.

Versión imprimible


i
C_0
0
n


C_n
i
C_0
0
n

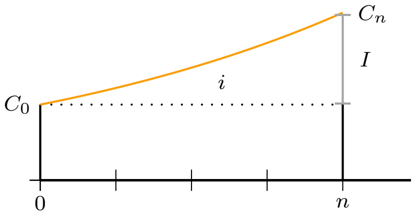


Figura: Capitalización compuesta

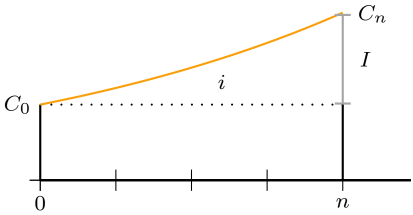


Figura: Capitalización compuesta

Las variables a considerar, son:

C_0 = valor actual o capital inicial
I = intereses
C_n = valor final o montante de la operación
i = tasa de interés
n = número de períodos

En cualquier caso, n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$C_1 = C_0 + C_0\,i = C_0(1+i)$$

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0(1+i) \\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0(1+i)\,(1+i) = C_0(1+i)^2
\end{aligned}
$$

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0 + C_0\, i = C_0(1+i) \\
C_2 &= C_1 + C_1\, i = C_0(1+i)\,(1+i) = C_0(1+i)^2 \\
C_3 &= C_2 + C_2\, i = C_0(1+i)^2\,(1+i) = C_0(1+i)^3
\end{aligned}$$

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0(1+i)\\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0(1+i)\,(1+i) = C_0(1+i)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2\, i = C_0(1+i)^2\,(1+i) = C_0(1+i)^3\\
&\ \vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_0(1+i)^{n-1}\,(1+i) = C_0(1+i)^n
\end{aligned}$$

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0(1+i)\\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0(1+i)\,(1+i) = C_0(1+i)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2\, i = C_0(1+i)^2\,(1+i) = C_0(1+i)^3\\
&\ \vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_0(1+i)^{n-1}\,(1+i) = C_0(1+i)^n
\end{aligned}
$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \tag{1}$$

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como:

$$\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0(1+i)\\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0(1+i)\,(1+i) = C_0(1+i)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2\, i = C_0(1+i)^2\,(1+i) = C_0(1+i)^3\\
&\;\vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_0(1+i)^{n-1}\,(1+i) = C_0(1+i)^n
\end{aligned}$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \tag{1}$$

expresión que relaciona el montante o capital final, transcurridos n períodos de capitalización, con el capital inicial prestado. ■

A la expresión $(1+i)^n$ la denominaremos *factor de capitalización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor actual nos permite obtener el valor final o montante equivalente.

A la expresión $(1+i)^n$ la denominaremos *factor de capitalización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor actual nos permite obtener el valor final o montante equivalente.

Independientemente de la ley financiera utilizada, los intereses generados, serán la diferencia entre el capital final e inicial, y por tanto:

$$C_n = C_0 + I \qquad I = C_n - C_0 \qquad I = C_0(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0\left[(1+i)^n - 1\right] \tag{2}$$

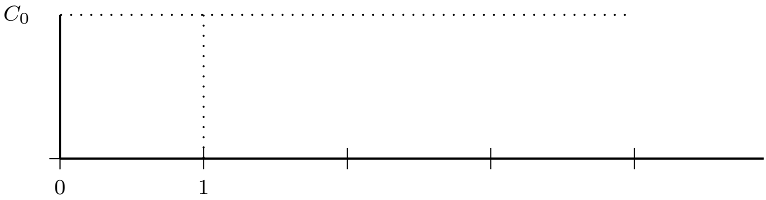
A la expresión $(1+i)^n$ la denominaremos *factor de capitalización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor actual nos permite obtener el valor final o montante equivalente.

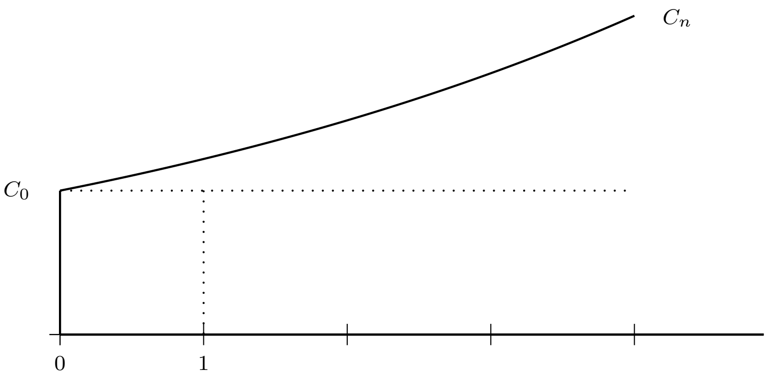
Independientemente de la ley financiera utilizada, los intereses generados, serán la diferencia entre el capital final e inicial, y por tanto:

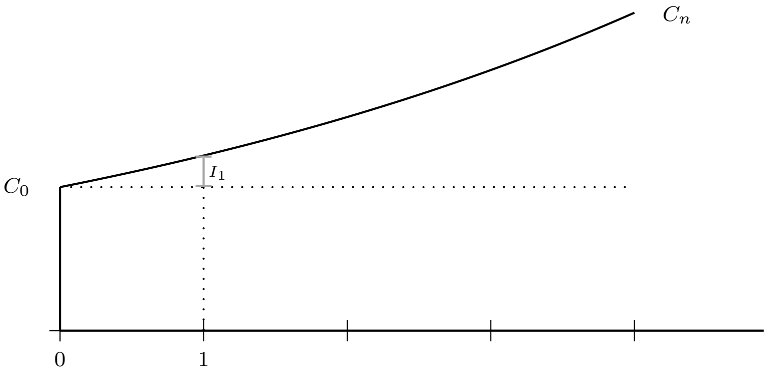
$$C_n = C_0 + I \qquad I = C_n - C_0 \qquad I = C_0(1+i)^n - C_0$$

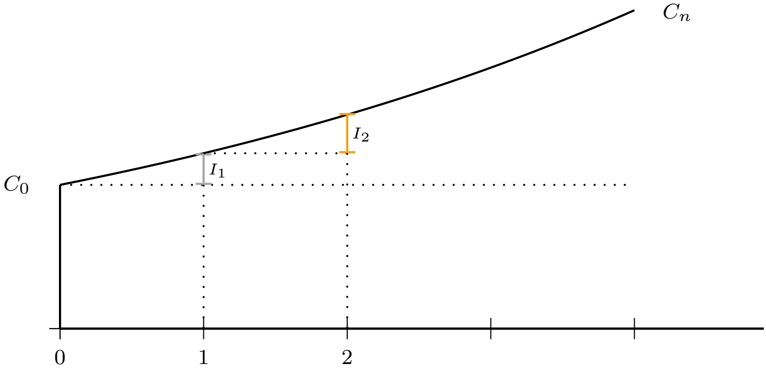
$$I = C_0\left[(1+i)^n - 1\right] \tag{2}$$

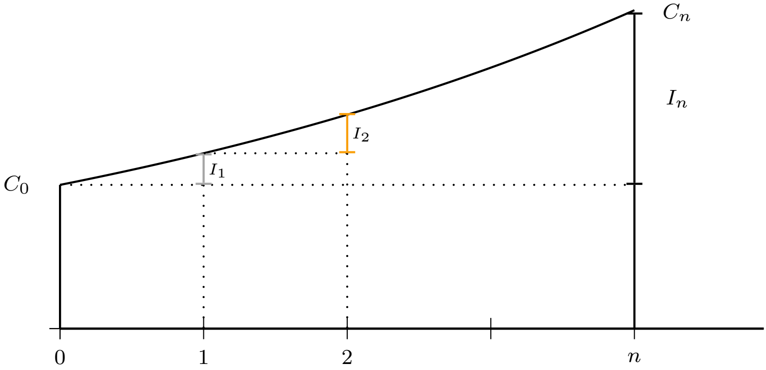
La capitalización compuesta consiste en un proceso de acumulación de los intereses al capital para producir conjuntamente nuevos intereses, periodo tras periodo, hasta llegar al final de la operación financiera. Gráficamente, la acumulación de intereses, se vería tal como se muestra en la figura 2.

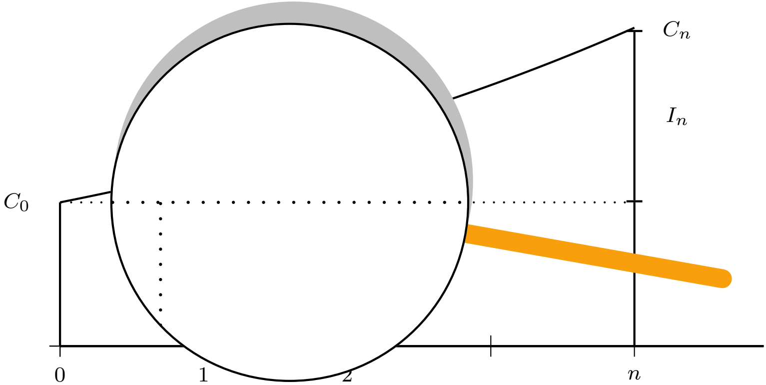

C_0
0
1

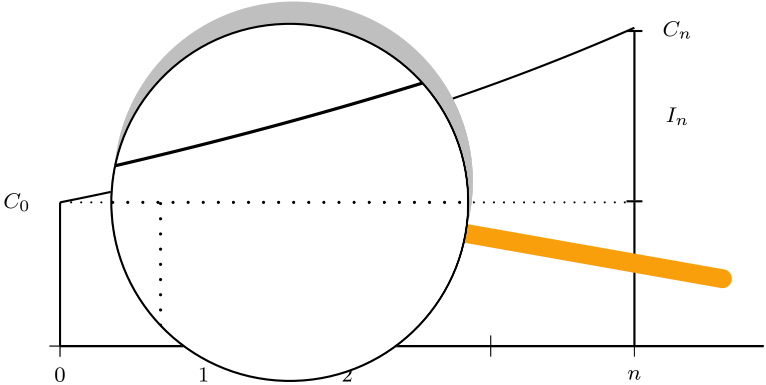

C_n
C_0
0
1

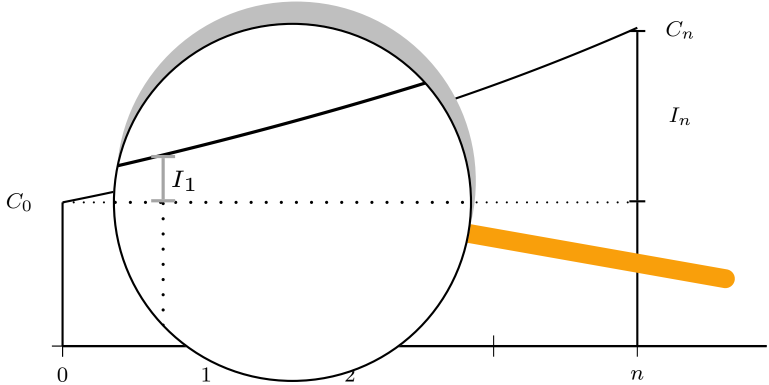

C_n
C_0
I_1
0
1

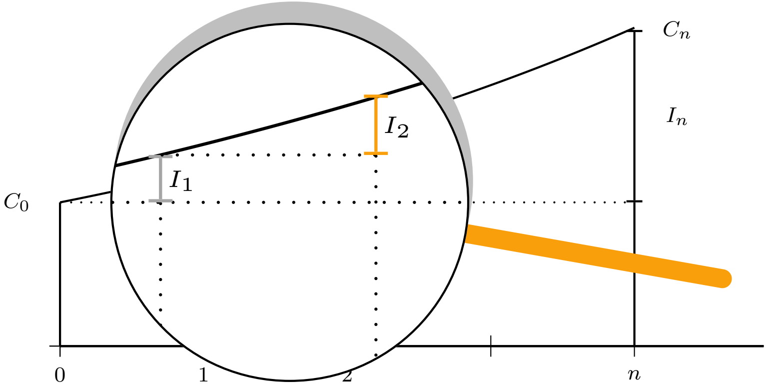

C_n
I_2
I_1
C_0
0
1
2

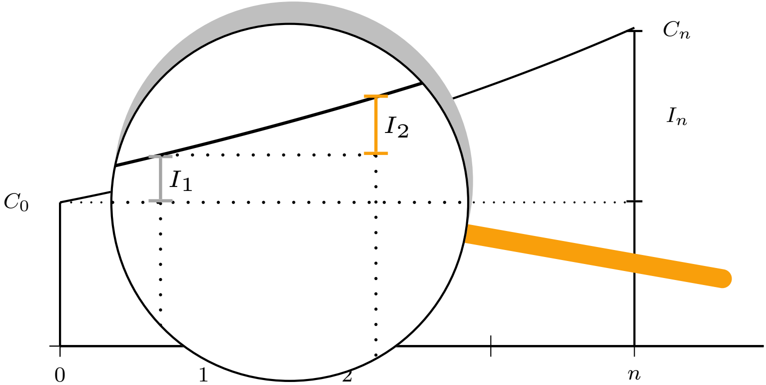

C_n
I_n
I_2
I_1
C_0
0
1
2
n


C_n
I_n
C_0
0
1
2
n


C_n
I_n
C_0
0
1
2
n


C_n
I_n
I_1
C_0
0
1
2
n


C_n
I_n
I_2
I_1
C_0
0
1
2
n


C_n
I_n
I_2
I_1
C_0
0
1
2
n

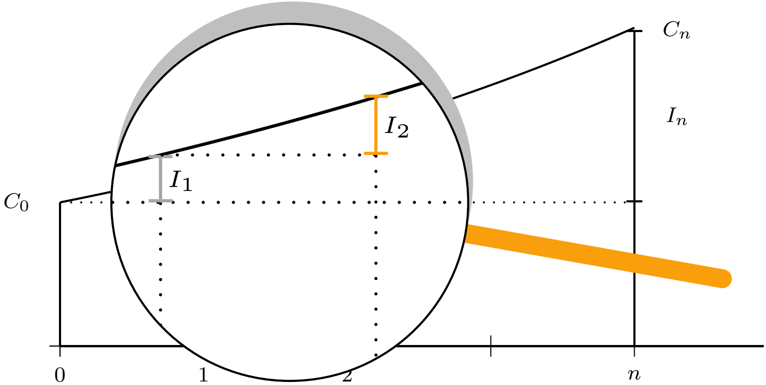


Figura: Acumulación de intereses en la capitalización compuesta

Si despejamos C_0 en (1), resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{o} \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n} \tag{3}$$

Si despejamos C_0 en (1), resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{o} \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n} \tag{3}$$

La expresión $(1+i)^{-n}$ recibe el nombre de *factor de actualización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor final obtenemos el capital inicial o valor actual.

Si despejamos C_0 en (1), resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{o} \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n} \tag{3}$$

La expresión $(1+i)^{-n}$ recibe el nombre de *factor de actualización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor final obtenemos el capital inicial o valor actual.

Para calcular n, tomando logaritmos y partiendo de $C_n = C_0(1+i)^n$,

$$\log C_n = \log C_0 + n \log(1+i)$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \tag{4}$$

Partiendo de la propia ley (1), despejaremos i,

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{5}$$

Partiendo de la propia ley (1), despejaremos i,

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{5}$$

Determinar el capital a invertir en capitalización compuesta al 5 % de interés para que en 4 años se convierta en 6 000 €.

Partiendo de la propia ley (1), despejaremos i,

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{5}$$

Determinar el capital a invertir en capitalización compuesta al 5 % de interés para que en 4 años se convierta en 6 000 €.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad C_0 = \frac{6\,000}{(1+0,05)^4} = 4\,936,21$$

Con la calculadora financiera, para obtener C_0,

5 [i] 4 [n] 6000 [FV] [PV] obteniendo como respuesta -4 936,21

Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad i = \left(\frac{1\,368,57}{1\,000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,04 = 4\,\%$$

Con la calculadora financiera, para obtener i,

1000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 8 $\boxed{\text{n}}$ 1368,57 $\boxed{\text{FV}}$ $\boxed{\text{i}}$ obteniendo el valor 4

Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad i = \left(\frac{1\,368,57}{1\,000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,04 = 4\,\%$$

Con la calculadora financiera, para obtener i,

1000 [CHS] [PV] 8 [n] 1368,57 [FV] [i] obteniendo el valor 4

Determinar el montante de un capital de 1 000 €, invertido al 6 % de interés compuesto anual durante 10 años.

Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad i = \left(\frac{1\,368,57}{1\,000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,04 = 4\,\%$$

Con la calculadora financiera, para obtener i,

1000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 8 $\boxed{\text{n}}$ 1368,57 $\boxed{\text{FV}}$ $\boxed{\text{i}}$ obteniendo el valor 4

Determinar el montante de un capital de 1 000 €, invertido al 6 % de interés compuesto anual durante 10 años.

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 1\,000\,(1+0,06)^{10} = 1\,790,85$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener C_n,

1000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 10 $\boxed{\text{n}}$ 6 $\boxed{\text{i}}$ $\boxed{\text{FV}}$ obteniendo la respuesta de 1 790,85

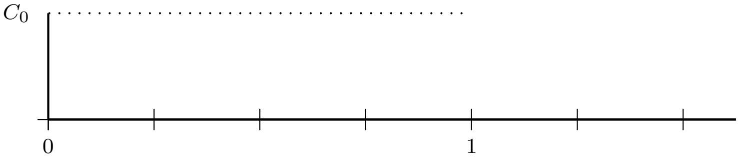
Determinar el tiempo necesario para que un capital de 2 000 € colocado a interés compuesto del 5 % anual, se convierta en 5 306,60 €.

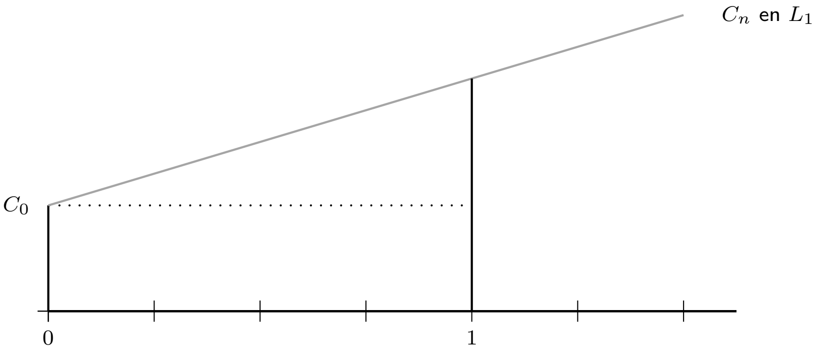
Determinar el tiempo necesario para que un capital de 2 000 € colocado a interés compuesto del 5 % anual, se convierta en 5 306,60 €.

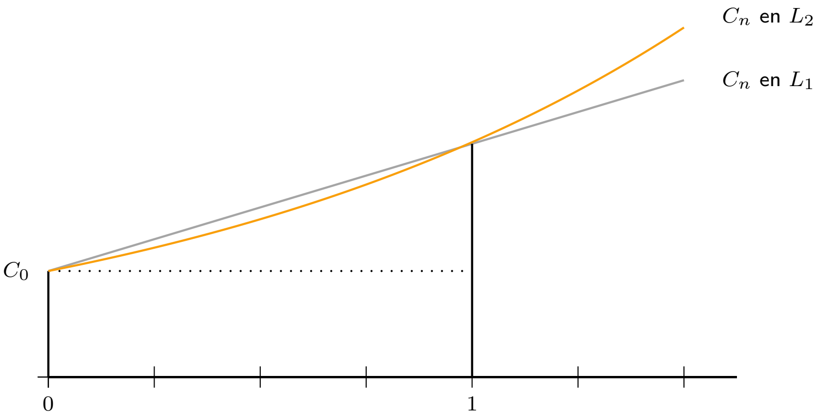
$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \qquad n = \frac{\log 5\,306,60 - \log 2\,000}{\log(1+0,05)} = 20 \text{ años}$$

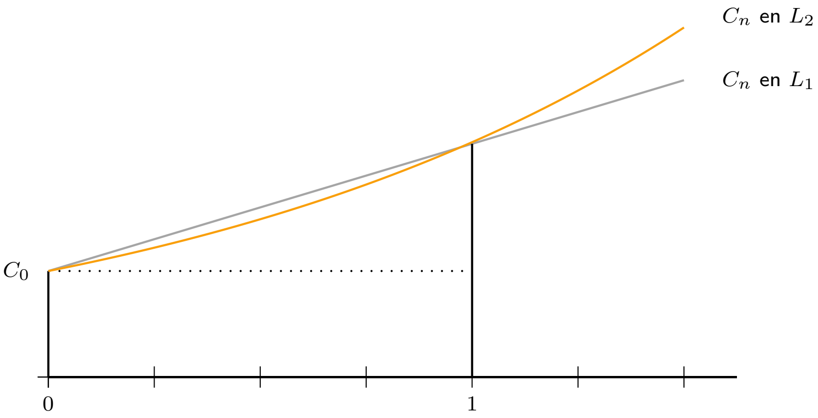
Utilizando la calculadora financiera, para obtener n,

2000 $\boxed{\text{CHS}}$ $\boxed{\text{PV}}$ 5 $\boxed{\text{i}}$ 5306,6 $\boxed{\text{FV}}$ $\boxed{\text{n}}$ obteniendo el resultado de 20


C_0
0
1


C_n en L_1
C_0
0
1


C_n en L_2
C_n en L_1
C_0
0
1


C_n en L_2
C_n en L_1
C_0
0
1

Los montantes obtenidos en la capitalización simple y compuesta, son:

$C_n = C_0(1 + i\,n)$ Capitalización simple,

$C_n = C_0(1 + i)^n$ Capitalización compuesta.

Los montantes obtenidos en la capitalización simple y compuesta, son:

$C_n = C_0(1 + i\,n)$ Capitalización simple,

$C_n = C_0(1 + i)^n$ Capitalización compuesta.

Ambas expresiones se diferencian entre sí por los factores de capitalización: $(1 + i)^n$ en la capitalización compuesta y $(1 + i\,n)$ en la capitalización simple.

De la comparación podemos decir que el montante de capitalización es *mayor* en la capitalización simple para periodos inferiores al año, *igual* para un año y *menor* para los periodos superiores al año.

Podemos concluir diciendo que la capitalización simple puede considerarse como una simplificación práctica de la compuesta, cuando el número de períodos varía entre 0 y 1, es decir, cuando se opera a corto plazo.

En definitiva, existen tres regímenes financieros para calcular los intereses a cobrar o a pagar en una operación financiera. Las principales características, son las siguientes:

Simple vencido	Descuento o simple anticipado	Compuesto vencido
Remuneración a tanto constante en todo el plazo.	Remuneración a tanto constante en todo el plazo.	Remuneración a tanto constante en todo el plazo.
Devolución de principal e intereses al final del plazo.	Devolución de principal al final del plazo, pero los intereses se abonan al principio del mismo.	Devolución de principal e intereses al final del plazo.
Solo el principal produce intereses.	Solo el principal produce intereses.	Los intereses se devengan al final de cada periodo y se acumulan al principal.
Factor financiero $(1 + i\,n)$	Factor financiero $(1 - d\,n)$	Factor financiero $(1 + i)^n$

En la capitalización compuesta no existe proporcionalidad entre los tantos de interés referidos a distintos períodos de tiempo, al contrario que en la simple.

En la capitalización simple, el capital final que se obtiene al cabo de n años al tipo de interés i, es el mismo que el obtenido al cabo de $n\,m$ períodos al tipo de interés $i^{(m)}$, siendo $i^{(m)}$ la m-ésima parte de i, y m el número de subperíodos en los que dividimos al año.

Es decir, se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{rcl} C_n & = & C_0(1+i\,n) \\ C_{n\,m} & = & C_0(1+i^{(m)}\,n\,m) \end{array}\right\} \text{siendo } i^{(m)} = \frac{i}{m}, \text{ tendremos que } C_n = C_{n\,m}$$

En la capitalización compuesta no existe proporcionalidad entre los tantos de interés referidos a distintos períodos de tiempo, al contrario que en la simple.

En la capitalización simple, el capital final que se obtiene al cabo de n años al tipo de interés i, es el mismo que el obtenido al cabo de $n\,m$ períodos al tipo de interés $i^{(m)}$, siendo $i^{(m)}$ la m-ésima parte de i, y m el número de subperíodos en los que dividimos al año.

Es decir, se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{rcl} C_n & = & C_0(1+i\,n) \\ C_{n\,m} & = & C_0(1+i^{(m)}\,n\,m) \end{array}\right\} \text{siendo } i^{(m)}=\frac{i}{m}, \text{ tendremos que } C_n=C_{n\,m}$$

En la capitalización compuesta, no existe esta proporcionalidad, ya que:

$$\left.\begin{array}{rcl} C_n & = & C_0(1+i)^n \\ C_{n\,m} & = & C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \end{array}\right\} \text{siendo } i^{(m)}=\frac{i}{m}, \text{ se cumplirá que } C_n\neq C_{n\,m}$$

Por tanto, en capitalización compuesta es importante conocer la frecuencia de capitalización, que designaremos por m, cuando ésta es inferior al año y que ya definimos como el número de veces que los intereses se incorporan al capital dentro del año.

Tendremos que determinar, en el régimen de capitalización compuesta de tanto efectivo anual i, el tanto de frecuencia $i^{(m)}$ que debe regir para otra capitalización compuesta de periodo m-ésimo, de forma que ambas capitalizaciones sean equivalentes.

Por tanto, en capitalización compuesta es importante conocer la frecuencia de capitalización, que designaremos por m, cuando ésta es inferior al año y que ya definimos como el número de veces que los intereses se incorporan al capital dentro del año.

Tendremos que determinar, en el régimen de capitalización compuesta de tanto efectivo anual i, el tanto de frecuencia $i^{(m)}$ que debe regir para otra capitalización compuesta de periodo m-ésimo, de forma que ambas capitalizaciones sean equivalentes.

El montante al cabo de n años en capitalización compuesta al tanto efectivo i, es:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

Por tanto, en capitalización compuesta es importante conocer la frecuencia de capitalización, que designaremos por m, cuando ésta es inferior al año y que ya definimos como el número de veces que los intereses se incorporan al capital dentro del año.

Tendremos que determinar, en el régimen de capitalización compuesta de tanto efectivo anual i, el tanto de frecuencia $i^{(m)}$ que debe regir para otra capitalización compuesta de periodo m-ésimo, de forma que ambas capitalizaciones sean equivalentes.

El montante al cabo de n años en capitalización compuesta al tanto efectivo i, es:

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

En capitalización compuesta al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, el montante al cabo de n años, es decir $n\,m$, m-ésimos de año, es:

$$C_n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

La equivalencia implica la igualdad de montantes, por lo que,

$$C_0(1+i)^n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \qquad (1+i)^n = \left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

extrayendo la raíz n en ambos miembros,

$$\left(1+i^{(m)}\right)^{m} = 1+i \tag{6}$$

ecuación de los tantos equivalentes o *equivalencia de tantos*. ■

La equivalencia implica la igualdad de montantes, por lo que,

$$C_0(1+i)^n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \qquad (1+i)^n = \left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

extrayendo la raíz n en ambos miembros,

$$\left(1+i^{(m)}\right)^m = 1+i \tag{6}$$

ecuación de los tantos equivalentes o *equivalencia de tantos*. ■

Podemos concluir que dos tantos son equivalentes cuando aplicado el proceso de capitalización compuesta al mismo capital inicial y durante el mismo tiempo producen capitales finales iguales.

Si en (6), extraemos la raíz m-ésima, tendremos:

$$1+i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \text{ de donde } i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

expresión que nos permite conocer el tanto de frecuencia en función del *tanto efectivo anual*.

Análogamente,

$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^{m} - 1$$

La TAE (Tasa Anual Equivalente o Efectiva), regulada para las Entidades de Crédito en la Circular 5/2012 de 27 de junio, intenta ser una *unidad homogénea de medida*. Esta tasa incluye el efecto de determinados gastos, como las comisiones que afectan el coste o rendimiento final de la operación. Si no existen gastos en una operación financiera, la TAE coincidirá con el interés efectivo anual i.

Análogamente,

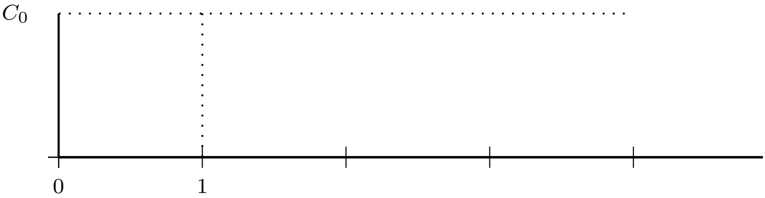
$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m - 1$$

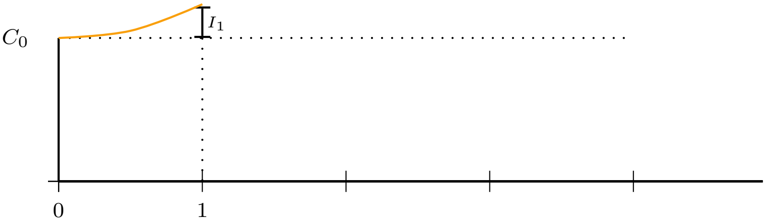
La TAE (Tasa Anual Equivalente o Efectiva), regulada para las Entidades de Crédito en la Circular 5/2012 de 27 de junio, intenta ser una *unidad homogénea de medida*. Esta tasa incluye el efecto de determinados gastos, como las comisiones que afectan el coste o rendimiento final de la operación. Si no existen gastos en una operación financiera, la TAE coincidirá con el interés efectivo anual i.

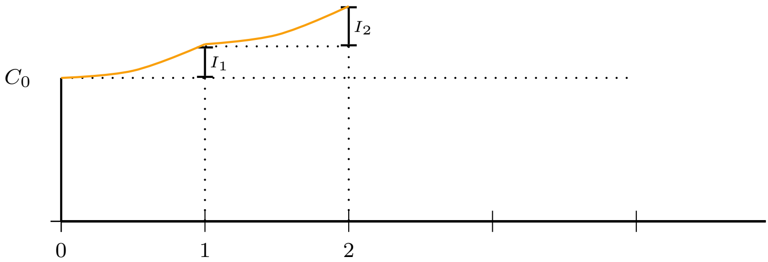
Por otra parte, se define el *tanto nominal* $J^{(m)}$, como un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización m por el tanto de frecuencia o equivalente.

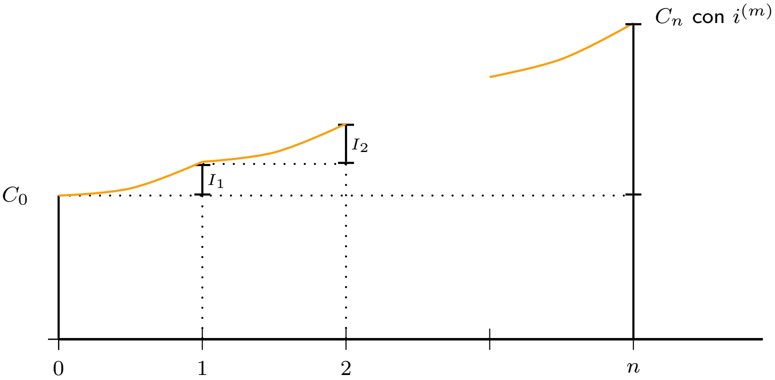
$$J^{(m)} = m\, i^{(m)} \tag{7}$$

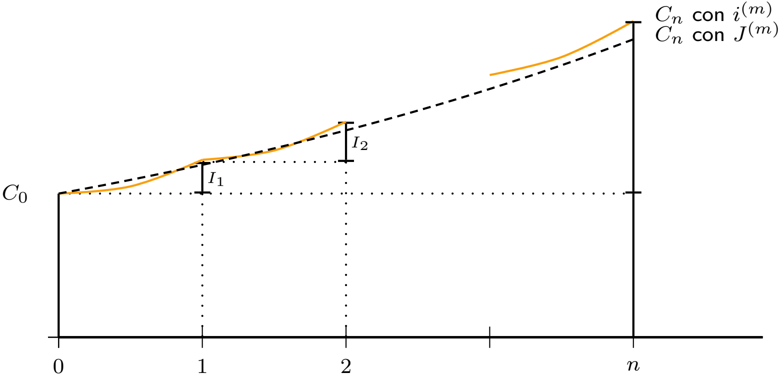
Este recibe también el nombre de TIN (Tipo de Interés Nominal anual). ■

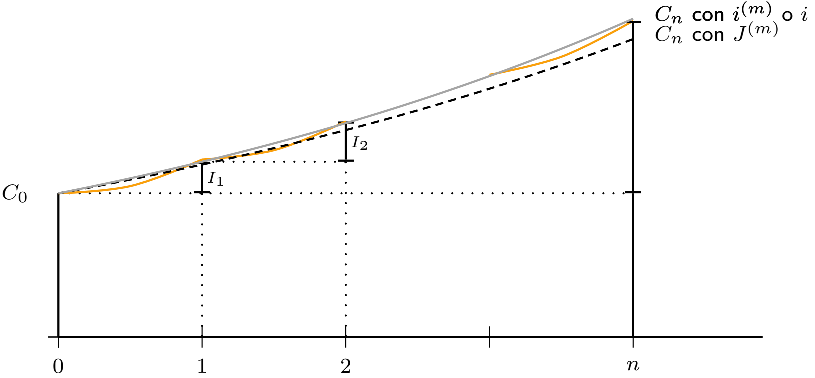

C_0
0
1


C_0
I_1
0
1


C_0
I_1
I_2
0
1
2


C_n con $i^{(m)}$
I_2
I_1
C_0
0
1
2
n


C_n con $i^{(m)}$
C_n con $J^{(m)}$
C_0
I_1
I_2
0
1
2
n


C_n con $i^{(m)}$ o i
C_n con $J^{(m)}$
C_0
I_1
I_2
0
1
2
n

Video Web: Tasa Anual Equivalente

Video Local: Tasa Anual Equivalente

Determinar el montante de un capital de 7 500 € invertido al 6 % anual capitalizable por trimestres durante 10 años.

Determinar el montante de un capital de 7 500 € invertido al 6 % anual capitalizable por trimestres durante 10 años.

Utilizando el tanto de frecuencia equivalente,

$$i^{(4)} = \frac{J^{(4)}}{4} = \frac{0,06}{4} = 0,015 \qquad C_{n\,m} = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = 7500\,(1{+}0,015)^{10\cdot 4} = 13605,14$$

Determinar el montante de un capital de 7 500 € invertido al 6 % anual capitalizable por trimestres durante 10 años.

Utilizando el tanto de frecuencia equivalente,

$$i^{(4)} = \frac{J^{(4)}}{4} = \frac{0,06}{4} = 0,015 \qquad C_{n\,m} = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = 7500\,(1{+}0,015)^{10\cdot 4} = 13605,14$$

Calculando previamente el tanto efectivo anual,

$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m - 1 = (1 + 0,015)^4 - 1 = 0,06136$$

$$C_n = C_0(1+i)^n = 7\,500\,(1 + 0,06136)^{10} = 13\,605,14$$

La capitalización compuesta fue establecida para valores de n expresados en un número entero de años.

Si suponemos que dado el tanto anual i, el tiempo z, no es entero, sino fraccionario, se podrá expresar de la forma,

$$z = n + \theta$$

en la que n es un número entero y θ decimal. Para la obtención del montante, puede utilizarse uno de los convenios siguientes:

La capitalización compuesta fue establecida para valores de n expresados en un número entero de años.

Si suponemos que dado el tanto anual i, el tiempo z, no es entero, sino fraccionario, se podrá expresar de la forma,

$$z = n + \theta$$

en la que n es un número entero y θ decimal. Para la obtención del montante, puede utilizarse uno de los convenios siguientes:

Convenio exponencial
Consiste en tomar como valor del montante al cabo del tiempo n, cualquiera que sea este, la expresión exponencial:

$$C_n = C_0(1+i)^{n+\theta}$$

Convenio lineal

Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de años que contenga el tiempo y a interés simple por la fracción de año restante.

El montante, según este convenio, será:

$$C_n = C_0(1+i)^n(1+\theta\, i)$$

estando lógicamente θ e i referidos a la misma unidad de tiempo.

Convenio lineal

Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de años que contenga el tiempo y a interés simple por la fracción de año restante.

El montante, según este convenio, será:

$$C_n = C_0(1+i)^n(1+\theta\, i)$$

estando lógicamente θ e i referidos a la misma unidad de tiempo.

Calcular el montante de un capital de 10 000 € al 4 % anual en 10 años y 3 meses.

Convenio lineal

Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de años que contenga el tiempo y a interés simple por la fracción de año restante.

El montante, según este convenio, será:

$$C_n = C_0(1+i)^n(1+\theta\, i)$$

estando lógicamente θ e i referidos a la misma unidad de tiempo.

Calcular el montante de un capital de 10 000 € al 4 % anual en 10 años y 3 meses.

Aplicando el convenio exponencial,

$$C_n = C_0(1+i)^{n+\theta} = 10\,000\,(1+0,04)^{10+\frac{3}{12}} = 14\,948,30$$

Utilizando la calculadora financiera podremos determinar los valores según ambos convenios que se conmutan con $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{EEX}}$ apareciendo el indicador C en la pantalla para el convenio lineal.

$$10\ \boxed{\text{ENTER}}\ 3\ \boxed{\text{ENTER}}\ 12\ \boxed{\div}\ \boxed{+}\ \boxed{\text{n}}\ 4\ \boxed{\text{i}}\ 10\,000\ \boxed{\text{CHS}}\ \boxed{\text{PV}}\ \boxed{\text{FV}}$$

Utilizando la calculadora financiera podremos determinar los valores según ambos convenios que se conmutan con STO EEX apareciendo el indicador C en la pantalla para el convenio lineal.

10 ENTER 3 ENTER 12 $\div$ $+$ n 4 i 10 000 CHS PV FV

Con el convenio lineal,

$$C_n = C_0(1+i)^n(1+\theta\, i) = 10\,000\,(1+0,04)^{10}(1+\frac{3}{12}\,0,04) = 14\,950,47$$

Con la calculadora financiera,

STO EEX FV FV con el resultado por el convenio lineal 14 950,47

La capitalización continua, constituye un caso particular de la capitalización compuesta. Cuando el número de fraccionamientos de m tiende a infinito, los intereses se capitalizan instantáneamente y nos encontramos ante la capitalización continua.

Hemos visto que el montante, en capitalización compuesta, al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, en n años, venía dado por:

$$C_n = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = C_0 \left(1 + \frac{J^{(m)}}{m}\right)^{n\,m}$$

Si $m \to \infty$, $J^{(m)} = J^{(\infty)} = \delta$, este último será el tanto nominal anual en el caso de capitalización continua, y el montante vendrá dado por:

$$C_n = \lim_{m \to \infty} C_0 \left(1 + \frac{\delta}{m}\right)^{n\,m} \tag{8}$$

Si e, base de los logaritmos neperianos, es:

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = 2,7182818\ldots$$

y transformando (8) con $m = x\,\delta$,

$$C_n = \lim_{x\to\infty} C_0 \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n\,x\,\delta} = C_0 \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{n\,\delta} = C_0\, e^{n\,\delta}$$

por lo que el montante en el caso de la capitalización continua, viene dado por la expresión

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \tag{9}$$

en la que δ, tanto nominal en capitalización continua, recibe también el nombre de *fuerza de interés*.

y transformando (8) con $m = x\,\delta$,

$$C_n = \lim_{x\to\infty} C_0 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{n\,x\,\delta} = C_0 \left[\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{n\,\delta} = C_0\, e^{n\,\delta}$$

por lo que el montante en el caso de la capitalización continua, viene dado por la expresión

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \tag{9}$$

en la que δ, tanto nominal en capitalización continua, recibe también el nombre de *fuerza de interés*.

Para obtener la equivalencia entre la fuerza de interés y la tasa efectiva, igualamos $C_0\, e^{n\,\delta} = C_0\,(1+i)^n$. En consecuencia, $e^{J^{(m)}} = (1+i)$, y por tanto,

$$i = e^{J^{(m)}} - 1$$

lo que nos permite obtener la tasa efectiva i y aplicar la expresión de la capitalización compuesta (1).

Determinar el montante obtenido con una inversión de 1 000 € que en capitalización continua se impone al 6 % durante 4 años.

Determinar el montante obtenido con una inversión de 1 000 € que en capitalización continua se impone al 6 % durante 4 años.

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \qquad C_n = 1\,000\, e^{4\cdot 0{,}06} = 1\,271{,}25$$

Con la calculadora financiera, podríamos obtener previamente i,

1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 6 $\boxed{\%}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\triangle\,\%}$ con el resultado de 6,1837

procediendo con este valor de i de forma convencional.

Se denomina así la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro con vencimiento presente, mediante la aplicación de una ley financiera de descuento compuesto. Es una operación inversa a la de capitalización compuesta.

Los elementos a tener en cuenta son:

D = descuento o rebaja que sufre una cantidad pagada antes de su vencimiento,
C_n = nominal o cantidad que se debe pagar,
C_0 = efectivo o cantidad realmente pagada.

Se denomina así la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro con vencimiento presente, mediante la aplicación de una ley financiera de descuento compuesto. Es una operación inversa a la de capitalización compuesta.

Los elementos a tener en cuenta son:

D = descuento o rebaja que sufre una cantidad pagada antes de su vencimiento,
C_n = nominal o cantidad que se debe pagar,
C_0 = efectivo o cantidad realmente pagada.

Por definición el descuento experimentado por el nominal C_n, como consecuencia de anticipación desde su vencimiento en el momento n, al momento presente 0, será:

$$D = C_n - C_0$$

Se define como el interés del efectivo, durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento racional compuesto lo designaremos por D_{rc} y se calcula sobre el valor del efectivo.

De la capitalización compuesta (1),

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

obtenemos el valor actual,

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

por lo que el descuento racional compuesto, será:

$$D_{rc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1+i)^{-n} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right]$$

$$D_{rc} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] \tag{10}$$

Se define como el interés del nominal durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento comercial compuesto, lo designamos por D_{cc} y se calcula sobre el valor nominal.

$$\begin{aligned}
C_{n-1} &= C_n - d\,C_n = C_n(1-d)\\
C_{n-2} &= C_{n-1} - d\,C_{n-1} = C_{n-1}(1-d) = C_n(1-d)\,(1-d) = C_n(1-d)^2\\
C_{n-3} &= C_{n-2} - d\,C_{n-2} = C_{n-2}(1-d) = C_n(1-d)^2\,(1-d) = C_n(1-d)^3\\
&\vdots\\
C_0 &= C_1 - d\,C_1 = C_1(1-d) = C_n(1-d)^{n-1}(1-d) = C_n(1-d)^n
\end{aligned}$$

$$C_0 = C_n(1-d)^n \tag{11}$$

Y el valor del descuento comercial compuesto, será:

$$D_{cc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1-d)^n = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$D_{cc} = C_n\left[1-(1-d)^n\right] \tag{12}$$

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{13}$$

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\left[1 - (1+i)^{-n}\right] = C_n\left[1 - (1-d)^n\right]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{13}$$

Tenemos que pagar una deuda de 24 000 € dentro de 3 años. Si se adelanta su pago al momento presente, qué descuento nos harán si se realiza a una tasa de descuento compuesto del 5 %

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{13}$$

Tenemos que pagar una deuda de 24 000 € dentro de 3 años. Si se adelanta su pago al momento presente, qué descuento nos harán si se realiza a una tasa de descuento compuesto del 5 %

Con el descuento racional,

$$D_{rc} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] \qquad D_{rc} = 24\,000\left[1-(1,05)^{-3}\right] = 3\,267,90$$

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] = C_n\left[1-(1-d)^n\right]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{13}$$

Tenemos que pagar una deuda de 24 000 € dentro de 3 años. Si se adelanta su pago al momento presente, qué descuento nos harán si se realiza a una tasa de descuento compuesto del 5 %

Con el descuento racional,

$$D_{rc} = C_n\left[1-(1+i)^{-n}\right] \qquad D_{rc} = 24\,000\left[1-(1,05)^{-3}\right] = 3\,267,90$$

Con el descuento comercial,

$$D_{cc} = C_n\left[1-(1-d)^{n}\right] \qquad D_{cc} = 24\,000\left[1-(1-0,05)^{3}\right] = 3\,423$$

Gracias por su atención