8

Financiación de la empresa

8.1. La financiación externa de la empresa

Es muy rara la empresa que se financia exclusivamente con capital propio procedente de sus accionistas y de la autofinanciación. En su gran mayoría parte de los recursos con los que la empresa financia sus inversiones, procede de fuentes ajenas a la misma y constituyen su *financiación externa.*

La importancia relativa de la financiación externa de la empresa viene dada por el ratio de endeudamiento que *es la relación entre los recursos ajenos y los recursos propios.* Este ratio, en condiciones normales suele ser inferior a la unidad.

$$r = \frac{E}{P}$$

No se puede dar una regla general sobre la conveniencia o no de aumentar la financiación externa de la empresa, lo cual dependerá de la solvencia y del coste relativo entre los fondos propios y ajenos.

En términos generales, no se puede dar una regla general sobre la magnitud óptima del endeudamiento de la empresa, ya que esto depende de cada caso particular. En general, si se puede decir que si el coste de la financiación externa es menor que el coste del capital propio, convendrá aumentar el endeudamiento de la empresa, aunque sin sobrepasar unos límites de prudencia en función de la solvencia de la misma.

8.1.1. Las deudas empresariales a largo plazo

Los créditos empresariales a largo plazo permiten la financiación de las inversiones de la empresa en activo fijo, es decir, las fábricas, las instalaciones permanentes y la parte permanente de la misma. Los empréstitos, son una forma importante de este tipo de financiación.

8.1.2. Las deudas empresariales a medio plazo

Los créditos a medio plazo son recursos financieros intermedios entre los créditos a largo plazo y los créditos a corto plazo. En general, son deudas con vencimiento superior a un año e inferior a cinco (aunque no existe unanimidad al respecto). Se utilizan en ocasiones como créditos puente para otros créditos de más larga duración, o bien están destinados a financiar aquellos elementos del activo fijo que sin ser absolutamente permanentes tienen una duración intermedia como pueden ser determinados elementos del equipo productivo, maquinaria, etc.

8.1.3. Las deudas empresariales a corto plazo

La mayoría de las empresas tienen deudas a corto plazo para lograr el equilibrio de su tesorería y no quedarse sin liquidez en un momento dado, lo cual además de suponer unos costes de ruptura elevados para la empresa se traduce en un descrédito y desprestigio de la misma.

Las formas de crédito a corto plazo más utilizadas por las empresas, son:

1. *El crédito comercial* o crédito concedido a la empresa por los proveedores de la misma que se instrumenta generalmente en forma de facturas y el correspondiente adeudo en la cuenta del proveedor o de letras de cambio.
2. *El crédito bancario* a corto plazo. Las principales formas que adopta, son:
   a) Descuento financiero,
   b) Descubiertos en cuenta corriente, (véase 3.4 en la página 28) y cuenta de crédito, (véase 3.7 en la página 32),
   c) Créditos estacionales (fundamentalmente en empresas agrícolas),
   d) Descuento comercial, (véase 3.3 en la página 23).
3. *La venta de cuentas* de la empresa o cuentas a cobrar por parte de la misma (*factoring*).

8.2. Arrendamiento financiero o «leasing»

Las empresas recurren muchas veces al arrendamiento como alternativa a la compra del capital productivo.

Los arrendamientos pueden ser de muy distintos tipos, pero todos tienen en común que el arrendatario (usufructuario) del bien, utiliza éste a cambio de un pago predeterminado al propietario del mismo (arrendador). Cuando el contrato de arrendamiento concluye, el bien alquilado revierte al propietario o arrendador, pero usualmente el contrato incluye la opción al arrendatario de comprar el bien a un precio preestablecido o bien efectuar un nuevo arrendamiento.

El arrendamiento financiero o *leasing* es un contrato de alquiler con opción de compra. Debe entenderse como un contrato de cesión de un bien que previamente la empresa arrendadora compra para si, con intención de cedérselo a un tercero en alquiler a cambio de cuotas periódicas, de igual cuantía, que incluyen parte de recuperación del coste y parte de intereses.

El contrato de *leasing* suele durar tanto como la vida económica del elemento patrimonial en cuestión aunque no necesariamente. Se establece así un plazo, un tiempo de cesión, durante el cual se va amortizando la totalidad de la inversión hasta llegar a un valor residual prefijado, generalmente igual al importe de una cuota suplementaria, la llamada *opción de compra*.

El *renting* , es un alquiler que tiene la posibilidad muy infrecuente y accesoria de poder optar por la adquisición al final del contrato. A diferencia del *leasing*, incluye todos los gastos de mantenimiento por cuenta del arrendador. El *leasing* es sobre todo una forma de financiación de bienes del inmovilizado.

8.2.1. Valoración

Ésta fórmula de financiación ha tenido un desarrollo extraordinario en las últimas décadas y es utilizada frecuentemente como alternativa a la inversión en bienes de equipo.

La equivalencia financiera de este tipo de operación, es

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + O_c\,(1+i)^{-n}$$

en la que O_c representa la opción de compra y la consideraremos prepagable dado que se trata de un arrendamiento. Habitualmente a esta opción de compra se la hace coincidir con un término amortizativo, es decir $a = O_c$, y entonces:

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1}|i} \tag{8.1}$$

El resto de magnitudes pueden obtenerse de la misma forma que en un préstamo francés considerando que la operación es prepagable tal como se describe en (7.4), página 125.

En particular, la determinación de I_s, sería:

$$I_s = (C_{s-1} - O_c)\,i$$

en la que al ser $a = O_c$,

$$I_s = (C_{s-1} - a)\,i \tag{8.2}$$

y el valor de A_s es,

$$A_1 = a - I_1$$

pudiendo obtener los siguientes como:

$$A_2 = A_1\,(1+i), \qquad A_3 = A_2\,(1+i), \qquad \cdots \qquad A_s = A_1\,(1+i)^{s-1}$$

El valor del capital amortizado M_s, vendrá determinado por,

$$M_s = A_1\,s_{\overline{s}|i}$$

y el capital pendiente C_s, utilizando el método prospectivo tal como vimos en (7.15) en la página 126,

$$C_s = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i} \tag{8.3}$$

Ejemplo 8.1 La sociedad CRILASA, firma un contrato de arrendamiento financiero de una nave industrial, por importe de 432 000 € con una opción de compra final más el impuesto en vigor al adquirir la propiedad, por un total de 10 años, con pagos mensuales al 3,708 % de interés nominal anual.

La comisión de apertura y gastos de formalización, han sido de 1 800,50 €.

Obtener las cuotas de amortización, el cuadro de amortización financiera de los 6 primeros pagos, los dos últimos y el tanto efectivo.

El tanto de interés mensual, sería:

$$i^{(m)} = \frac{j^{(m)}}{m} \qquad\qquad i^{(12)} = \frac{j^{(12)}}{12} = \frac{0,037080}{12} = 0,003090$$

y la cuota periódica, se obtendría como:

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1}|i} \qquad\qquad 432\,000 = a\,\ddot{a}_{\overline{121}|0,003090}$$

siendo,

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

y el valor de $\ddot{a}_{\overline{121}|0,003090}$,

$$\ddot{a}_{\overline{121}|0,003090} = \frac{1-(1+0,003090)^{-121}}{0,003090}(1+0,003090) = 101,137003$$

y por tanto,

$$a = \frac{432\,000}{101,137003} = 4\,271,43$$

Con la calculadora financiera,

g BEG 121 n 3,7080 g i 432000 PV 0 FV PMT obteniendo -4271,43

Utilizando el método prospectivo visto en (8.3), página 156, el capital pendiente al inicio del momento s, se definiría como:

$$C_s = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$

siendo para el momento $s = 118$,

$$C_{118} = 4\,271,43\,\ddot{a}_{\overline{121-118}|0,003090} = 4\,271,43 \cdot 2,990768 = 12\,774,87$$

El capital amortizado hasta el período s, para M_{119}, sería, calculando I_1 previamente,

$$I_1 = (C_0 - O_c)\,i = (432\,000 - 4\,271,43)\,0,003090 = 1\,321,68$$

$$M_{119} = 2\,949,75\,s_{\overline{119}|0,003090} = 2\,949,75\,\frac{(1+0,003090)^{119}-1}{0,003090} = 423\,469,93$$

El cuadro de amortización solicitado, es el siguiente:

Período	Término	Intereses	Amortizado	Pendiente	Acumulado	21 % IVA	Total
0				432 000,00			
1	4 271,43	1 321,68	2 949,75	429 050,25	2 949,75	897,00	5 168,43
2	4 271,43	1 312,57	2 958,87	426 091,38	5 908,62	897,00	5 168,43
3	4 271,43	1 303,42	2 968,01	423 123,37	8 876,63	897,00	5 168,43
4	4 271,43	1 294,25	2 977,18	420 146,19	11 853,81	897,00	5 168,43
5	4 271,43	1 285,05	2 986,38	417 159,81	14 840,19	897,00	5 168,43
6	4 271,43	1 275,83	2 995,61	414 164,20	17 835,80	897,00	5 168,43
⋮							
118				12 774,87			
119	4 271,43	26,28	4 245,16	8 529,71	423 469,93	897,00	5 168,43
120	4 271,43	13,16	4 258,28	4 271,43	427 728,57	897,00	5 168,43
O_c	4 271,43				432 000,00	897,00	5 168,43

Y el tanto efectivo considerando los gastos:

$$432\,000 - 1\,800,50 = 4\,271,43\,\ddot{a}_{\overline{121}|i}$$

$$\ddot{a}_{\overline{121}|i_e} = \frac{430\,199,50}{4\,271,43} = 100,715568$$

Utilizando la calculadora financiera para resolver i:

g BEG 121 n 100,715568 PV 1 CHS PMT i

12 n 0 PMT 100 CHS PV FV + obteniendo 3,8642

$$i_{12} = 0,00316453 \qquad i = (1+0,00316453)^{12} - 1 \qquad i = 0,038642$$

Ejemplo 8.2 Determinar la cuota de una operación de arrendamiento financiero sobre una máquina de coste 20 000 € a 5 años con una opción de compra de 6 000 €. El tipo de interés establecido es del 8 % anual con pagos mensuales.

$$C_0 = a\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} + O_c\,(1+i)^{-n}$$

$$20\,000 = a\,\ddot{a}_{\overline{60}|0,006667} - 6\,000\,(1+0,006667)^{-60}$$

$$a = \frac{20\,000 - 6\,000\,(1+0,006667)^{-60}}{\frac{1-(1+0,006667)^{-60}}{0,006667}\,(1+0,006667)} = 321,72$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener a,

g BEG 5 g n 8 g i 20000 PV 6000 CHS FV PMT obteniendo 321,72

8.3. Empréstitos. Introducción

Los empréstitos tienen su origen en las necesidades de financiación externa del Estado y de las Entidades públicas o privadas. Las cuantías elevadas que demandan en préstamo son dificilmente alcanzables en una sola operación, préstamo único, por lo que se recurre a la emisión de obligaciones, bonos o un agregado de préstamos.

Para que el conjunto de préstamos pueda integrarse en una sola operación es necesario que todos ellos se amorticen mediante una única ley financiera, en cuyo caso los préstamos son homogéneos.

Definimos *empréstito* como un conjunto de préstamos homogéneos de igual cuantía (prestación) y amortizables con idéntica contraprestación. El título valor de cada préstamo recibe el nombre de *obligación* y la cuantía de su prestación C, se denomina *valor nominal* de la obligación. Si designamos N_1 el número total de obligaciones que componen el empréstito, la prestación total o total nominal del empréstito será $C_0^T = C\,N_1$.

De forma general, y a fin de facilitar el acceso al pequeño inversor, se determina un valor nominal de las obligaciones bastante reducido lo que origina un número de obligaciones N_1 muy elevado. Es aconsejable, por razones de eficacia administrativa no mantener en vigor tan elevado número de obligaciones durante toda la vida del empréstito. Interesa, por tanto, ir cancelando periódicamente grupos de títulos con objeto de que vaya disminuyendo su número. A fin de compatibilizar la uniformidad de las operaciones con la diferente duración, se establece que la concreción de las obligaciones que corresponda cancelar en cada punto se efectúe por sorteo o por cualquier procedimiento equiprobable para todos. En base a esto, podemos distinguir dos tipos de empréstitos:

1. Los empréstitos con un solo punto de reembolso de títulos, es decir, con idéntica duración para todas las obligaciones.
2. Los empréstitos con cancelación escalonada de los títulos, es decir, formados por títulos con distinta duración, pero iguales términos de probabilidad.

8.3.1. Empréstitos sin cancelación escalonada

Este tipo de empréstitos con un solo punto de reembolso, no es otra cosa que un conjunto de préstamos exactamente iguales en todas sus características.

Por tanto, el empréstito, como operación resultante, es igual a uno cualquiera de los préstamos multiplicado por el número de ellos, y así, el estudio del empréstito como operación conjunta es aplicable a cada uno de los préstamos componentes y viceversa.

Este tipo de empréstitos, no presenta ninguna característica diferenciadora respecto de los préstamos que agrega, por lo que le serán de aplicación todas las conclusiones obtenidas en el estudio de las operaciones de amortización, manteniéndose incluso las expresiones de los casos particulares (préstamo simple, método americano, de cuotas constantes, etc.). Cuando la amortización se realiza sucesivamente a lo largo de su duración (método francés, de cuotas constantes, etc.) también se dice que el empréstito se amortiza por reducción del nominal de los títulos.

8.3.2. Empréstitos con cancelación escalonada

Se caracterizan por la aleatoriedad en la duración de sus títulos, determinándose por sorteo las obligaciones que corresponde cancelar en cada punto de amortización.

8.3.3. Problemática de los empréstitos

Con relación al ente emisor, su fin principal es obtener la necesaria financiación en las mejores condiciones posibles. Cuando el importe de la emisión se destina a financiar una inversión, el emisor tratará de conseguir que la contraprestación, en cuanto a su duración y distribución de cuantías y vencimientos, se adapte de forma óptima al rendimiento de la inversión y necesidades de liquidez, para lo que fundamentalmente puede actuar sobre el programa de cancelación.

Con relación al obligacionista, la suscripción de obligaciones de un empréstito supone para el obligacionista una inversión de capital. La decisión de la inversión se apoya, a igualdad de otras circunstancias, en la mayor rentabilidad efectiva.

Desde el mercado de capitales, el empréstito está condicionado por las circunstancias que concurren en el mercado en el momento de la emisión.

8.3.4. Elementos que intervienen en los empréstitos

La variedad y peculiaridad de los empréstitos es amplia. Aunque su base está en los préstamos, los elementos que intervienen son los siguientes:

C_0 = $C\,N_1$, valor nominal del empréstito,
N_1 = número de títulos emitidos a reembolsar,
N_{k+1} = obligaciones o títulos en circulación o vivos al comienzo del año $k+1$,
C = valor nominal de cada título,
C_k = valor de reembolso o precio de amortización de cada obligación que se amortiza en el año k,
P_k = prima de amortización en el año k,
L_k = valor del lote en el año k,
i_k = tipo de interés nominal satisfecho en el año k. Puede ser constante o variable,
n = número de años de duración del empréstito,
M_k = número de obligaciones amortizadas en el año k,
m_k = $\sum_{r=1}^{k} M_r$, número de obligaciones amortizadas al final de los k primeros períodos,
I_k = intereses satisfechos en el año k, por la entidad emisora,
$C\,i_k$ = cupón anual o interés de una obligación satisfecho al final del año k,
a_k = anualidad satisfecha por la entidad emisora al final del año k

8.4. Empréstito normal. Método francés

Como hemos establecido anteriormente en los empréstitos puros o normales, la emisión y amortización de títulos es a la par, es decir, por el nominal; con pago periódico de intereses y cupón vencido, anual o fraccionado.

Teniendo en cuenta que los empréstitos son un conjunto de préstamos, utilizaremos análogos razonamientos a los empleados en la amortización de préstamos (véase 7.4 en la página 125). En la práctica el empréstito normal es aquél que se amortiza siguiendo el método del sistema progresivo francés o anualidades constantes.

Dado un empréstito de N_1 obligaciones de nominal C, que devengan el interés anual i, pagadero de forma vencida y amortizado en n períodos mediante anualidades, que comprenden cada uno los intereses de los títulos en circulación y una cantidad destinada a la amortización de un cierto número de obligaciones.

$$C_k = C \qquad a_k = a \qquad i_k = i$$

el valor actual de la contraprestación, será,

$$N_1 \, C = a \, a_{\overline{n}|i} \qquad a = \frac{N_1 \, C}{a_{\overline{n}|i}} \tag{8.4}$$

La primera anualidad,

$$a = M_1 \, C + N_1 \, C \, i \qquad M_1 = \frac{a - N_1 \, C \, i}{C}$$

y de esta forma determinamos el número de títulos amortizados el primer año.

Si comparamos las anualidades de dos años consecutivos k y $k+1$, tendremos:

$$a = M_k \, C + N_k \, C \, i \qquad a = M_{k+1} \, C + N_{k+1} \, C \, i$$

igualando,

$$M_k \, C = N_k \, C \, i = M_{k+1} \, C + N_{k+1} \, C \, i$$
$$C \, M_{k+1} = C \, M_k + N_k \, C \, i - N_{k+1} \, C \, i = C \, M_k + C \, i(N_k - N_{k+1})$$

dividiendo ambos por C, y teniendo en cuenta que $N_k - M_{k+1} = M_k$,

$$M_{k+1} = M_k + M_k \, i = M_k \, (1+i)$$

es decir, los títulos amortizados forman una progresión geométrica de razón $(1+i)$. Aplicando la relación entre un término cualquiera y el primero,

$$M_k = M_1 \, (1+i)^{k-1} \tag{8.5}$$

expresión que nos permite calcular los términos amortizados en cualquier momento k en función de los amortizados en el primer año. ■

Teniendo en cuenta esta relación,

$$\begin{aligned}
M_1 &= M_1 = \frac{a - N_1 \, C \, i}{C} \\
M_2 &= M_1 \, (1+i) \\
M_3 &= M_1 \, (1+i)^2 \\
&\vdots \\
M_n &= M_1 \, (1+i)^{n-1}
\end{aligned}$$

sumando los primeros miembros e igualándolo a la suma de los segundos,

$$\sum_{s=1}^{n} M_s = M_1 \left[1 + (i+1) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^{n-1}\right]$$

expresión en la que el primer miembro es el total de obligaciones emitidas N_1 y el segundo es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1+i)$, por lo que aplicando (A.11) de la página 193:

$$N_1 = M_1 \frac{(1+i)^{n-1}(1+i) - 1}{(1+i) - 1} = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i} = M_1\, s_{\overline{n|}i}$$

de donde,

$$N_1 = M_1\, s_{\overline{n|}i} \tag{8.6}$$

expresión que nos permite obtener el número de títulos amortizados en el primer año en función del número total de títulos emitidos:

$$M_1 = \frac{N_1}{s_{\overline{n|}i}} \tag{8.7}$$

Las obligaciones en circulación al comienzo de un año cualquiera $k+1$, las calculamos a partir del capital pendiente de amortizar que al comienzo de dicho año será,

$$N_{k+1}\, C = a\, a_{\overline{n-k|}i}$$

y por tanto,

$$N_{k+1} = \frac{a}{C}\, a_{\overline{n-k|}i} = N_1 \frac{a_{\overline{n-k|}i}}{a_{\overline{n|}i}} \tag{8.8}$$

El número de obligaciones amortizadas en un año cualquiera k, también puede obtenerse por diferencia entre las obligaciones en circulación al inicio del año k y $k+1$,

$$M_k = N_k - N_{k+1} = \frac{a}{C}\left(a_{\overline{n-k+1|}i} - a_{\overline{n-k|}i}\right) = \frac{a}{C\,(1+i)^{n-k+1}}$$

El número de obligaciones amortizadas al final de los k primeros años, aplicando (8.6), será:

$$m_k = \sum_{s=1}^{k} M_s = M_1\, s_{\overline{k|}i} = N_1 \frac{s_{\overline{k|}i}}{s_{\overline{n|}i}}$$

■

La construcción del cuadro es análogo a la del préstamo estudiado en 7.4.5 de la página 127, con la dificultad de obtener el número de obligaciones amortizadas para cada año que se obtiene para los distintos valores de k de la expresión (8.5). Estos, generalmente no son enteros y para solucionar el problema, existen dos procedimientos:

1. *Método de capitalización de los residuos o teórico*, que consiste en amortizar un número entero por defecto de obligaciones y colocar a interés el residuo de la anualidad para acumularlo en el siguiente.

2. *Método de redondeo de las amortizaciones teóricas o práctico* consistente en calcular los títulos amortizados cada año, sin considerar que estos números han de ser enteros, sumar después los números enteros de los títulos amortizados cada año y completar los que faltan hasta la totalidad de los emitidos, redondeando por exceso los de aquellos años que tengan mayor parte decimal.

Ejemplo 8.3 Formar el cuadro de amortización de un empréstito normal de 10 000 obligaciones de 100 € nominales cada una, cupón anual de 5 €, duración de la amortización 10 años por el método de los residuos y por el método de redondeo de las amortizaciones teóricas.

1. Método de capitalización de los residuos:

   La anualidad teórica,

$$a = \frac{N_1\,C}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{10\,000 \cdot 100}{a_{\overline{10}|0,05}} = 129\,504,57$$

   Los intereses del primer año,

$$I_1 = N_1\,C\,i = 10\,000 \cdot 100 \cdot 0,05 = 50\,000$$

   La cantidad disponible para amortizar,

$$A_1 = a - I_1 = 129\,504,57 - 50\,000 = 79\,504,57$$

   al ser las obligaciones de 100 € pueden amortizarse solo 795 títulos quedando un residuo de 4,57 €. La anualidad queda disminuida en este importe y para conseguir que la amortización sea posible en los 10 años previstos, acumularemos a la segunda anualidad el residuo del primer año con sus intereses al 5 %.

   En el segundo año dispondremos de la anualidad,

$$a_2 = 129\,504,57 + 4,57 \cdot 1,05 = 129\,509,38$$

   La cuota de intereses del segundo año, teniendo en cuenta que los títulos en circulación son,

$$N_2 = N_1 - M_1 = 10\,000 - 795 = 9\,205$$

$$I_2 = N_2\,C\,i = 9\,205 \cdot 100 \cdot 0,05 = 46\,025$$

   quedará disponible para amortizar,

$$A_2 = a_2 - I_2 = 129\,509,38 - 46\,025 = 83\,484,38$$

   cantidad que permite amortizar 834 títulos y deja un residuo de 84,38 € que se acumulará junto con sus intereses al tercer período, por lo que dispondremos de una anualidad de,

$$a_3 = 129\,504,57 + 84,38 \cdot 1,05 = 129\,593,17$$

   y así seguiremos hasta el último año.

   El cuadro correspondiente por el método de capitalización de residuos, sería el siguiente:

Años	Anualidad		Intereses	Amortización		Residuo	Residuo e	Amortizadas		Vivas
	Disponible	Efectiva		Teórica	Efectiva		Intereses	Anual	Total	
										10 000
1	129 504,57	129 500	50 000	79 504,57	79 500	4,57	4,80	795	795	9 205
2	129 509,38	129 425	46 025	83 484,38	83 400	84,38	88,60	834	1 629	8 371
3	129 593,17	129 555	41 855	87 738,17	87 700	38,17	40,08	877	2 506	7 494
4	129 544,66	129 470	37 470	92 074,66	92 000	74,66	78,39	920	3 426	6 574
5	129 582,96	129 570	32 870	96 712,96	96 700	12,96	13,61	967	4 393	5 607
6	129 518,19	129 435	28 035	101 483,19	101 400	83,19	87,35	1 014	5 407	4 593
7	129 591,92	129 565	22 965	106 626,92	106 600	26,92	28,27	1 066	6 473	3 527
8	129 532,84	129 435	17 635	111 897,84	111 800	97,84	102,73	1 118	7 591	2 409
9	129 607,31	129 545	12 045	117 562,31	117 500	62,31	65,43	1 175	8 766	1 234
10	129 570,00	129 570	6 170	123 400,00	123 400	0,00	0,00	1 234	10 000	0

2. Método de redondeo de las amortizaciones teóricas:

   Este método se utilizará por su simplicidad. Siendo,

$$M_1 = \frac{a - N_1\,C\,i}{C}$$

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{129\,504,57 - 10\,000 \cdot 100 \cdot 0,05}{100} = 795,0457 \approx 795 \\
M_2 &= 795,0457\,(1+0,05) = 834,7980 \approx 835 \\
M_3 &= 834,7980\,(1+0,05) = 876,5379 \approx 877 \\
M_4 &= 876,5379\,(1+0,05) = 920,3647 \approx 920 \\
M_5 &= 920,3647\,(1+0,05) = 966,3829 \approx 966 \\
M_6 &= 966,3829\,(1+0,05) = 1\,014,7020 \approx 1\,015 \\
M_7 &= 1\,014,7020\,(1+0,05) = 1\,065,4371 \approx 1\,065 \\
M_8 &= 1\,065,4371\,(1+0,05) = 1\,118,7089 \approx 1\,119 \\
M_9 &= 1\,118,7089\,(1+0,05) = 1\,174,6443 \approx 1\,175 \\
M_{10} &= 1\,174,6443\,(1+0,05) = 1\,233,3765 \approx 1\,233 \\
& \qquad\qquad Total = 10\,000
\end{aligned}
$$

La construcción del cuadro es inmediata, resultando diferente al confeccionado por el método de residuos:

			Amortizados		Anualidad	
Años	Vivos	Intereses	Año	Total	Práctica	Teórica
1	10 000	50 000	795	795	129 500	129 504,57
2	9 205	46 025	835	1 630	129 525	129 504,57
3	8 370	41 850	877	2 507	129 550	129 504,57
4	7 493	37 465	920	3 427	129 465	129 504,57
5	6 573	32 865	966	4 393	129 465	129 504,57
6	5 607	28 035	1 015	5 408	129 535	129 504,57
7	4 592	22 960	1 065	6 473	129 460	129 504,57
8	3 527	17 635	1 119	7 592	129 535	129 504,57
9	2 408	12 040	1 175	8 767	129 540	129 504,57
10	1 233	6 165	1 233	10 000	129 465	129 504,57

En la práctica, el pago de los intereses se hace mediante cupones semestrales, trimestrales, etc. En este caso, se dividen los intereses anuales, en tantas partes como cupones se paguen dentro del año, suponiendo que el tanto anual es el nominal no el efectivo.

8.5. Empréstito de cupón cero

Son empréstitos con un único pago de intereses en el momento de la amortización de los títulos. Los intereses se devengan día a día, pero no se pagan sobre los títulos vivos, sino que se acumulan en capitalización compuesta y se pagan de una vez en los títulos amortizados en cada sorteo.

Si la anualidad es constante, tal como hemos visto en 8.4 de la página 160:

$$N_1\,C = a\,a_{\overline{n}|i}$$

y, por tanto,

$$a = \frac{N_1\,C}{a_{\overline{n}|i}}$$

Al ser constante,

$$M_k = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-k}$$

$$M_{k+1} = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-k+1}$$

y, en consecuencia,

$$M_{k+1} = M_k\,(1+i)^{-1}$$

es decir, los títulos forman una progresión geométrica decreciente de razón $(1+i)^{-1}$

■

Ejemplo 8.4 Confecciona el cuadro de amortización de un empréstito de 10 000 obligaciones, emitidas y amortizadas a la par en 3 años por sorteo de términos amortizativos de igual cuantía si el nominal de los títulos asciende a 50 € y son cupón cero, con una rentabilidad efectiva anual del 4 %

$$a = \frac{N_1\,C}{a_{\overline{n}|i}} \qquad a = \frac{10\,000\,50}{a_{\overline{3}|0,04}} \qquad a = 180\,174,27$$

$$M_1 = \frac{a}{C}\,(1+i)^{-1} \qquad M_1 = \frac{180\,174,27}{50}\,(1+0,04)^{-1} = 3\,464,88$$

$$M_2 = N_1\,(1+i)^{-1} \qquad M_2 = 3\,464,88\,(1+0,04)^{-1} = 3\,361,62$$

$$M_3 = N_2\,(1+i)^{-1} \qquad M_3 = 3\,361,62\,(1+0,04)^{-1} = 3\,203,48$$

Redondeando,

$$M_1 = 3\,465$$
$$M_2 = 3\,332$$
$$M_3 = 3\,203$$

Años	Anualidad	Intereses	Amortización	Vivos
				10 000
1	180 180,00	3 465	3 465	6 535
2	180 194,56	3 332	6 797	3 203
3	180 146,98	3 203	10 000	0

Ejercicios propuestos

Ejercicio 8.1 Una sociedad firma un contrato de *leasing* por 20 000 €, que deberá amortizar mediante 36 mensualidades más una opción de compra, siendo el tipo de interés del 5 %. Confeccionar los tres primeros pagos del cuadro de amortización.

Solución: $a = 581,98$

Ejercicio 8.2 Se firma un contrato de arrendamiento financiero de 40 000 €, al 6 % de interés efectivo anual, con pagos trimestrales a 3 años. Determinar el valor de cada cuota y los intereses correspondientes al décimo período sabiendo que la opción de compra es una cuota más.

Solución: 1) $a = 3\,352,98$ 2) $I_{10} = 143,38$

Ejercicio 8.3 Se concierta un contrato de *leasing* con una entidad por 120 000 € a un plazo de 10 años más una opción de compra equivalente a una cuota, con pagos de las cuotas mensualmente al interés efectivo anual del 6 %. Obtener:

1. Mensualidad,
2. Intereses pagados en el primer año de vigencia,
3. Capital pendiente de pago al inicio del 6 año.

Solución: 1) $a = 1\,308,27$ 2) $\sum_{s=1}^{12} I = 6\,694,32$ 3) $C_{60} = 69\,238,65$

Ejercicio 8.4 Calcular la cuota correspondiente a un contrato de arrendamiento financiero de pagos mensuales, por 5 años, a un tipo de interés variable del 5 % nominal anual inicial, si el importe del mismo es de 24 000 € más una opción de compra equivalente a una mensualidad. Obtener además:

1. Capital amortizado en los dos primeros años,
2. Intereses totales de la operación,
3. Mensualidad del mes 14 en el supuesto de que el tipo de interés se haya modificado al 5,50 %.

Solución: $a = 444,52$ 1) $M_{24} = 8\,723,73$
2) $\sum_{s=1}^{61} I = 3\,115,78$ 3) $a' = 448,72$

Ejercicio 8.5 Se emite un empréstito de 100 000 obligaciones de 1 000 € nominales, durante 10 años, cupón anual vencido de 60 €, amortizable mediante anualidades constantes. Se pide:

1. Anualidad constante que amortiza el empréstito,
2. Títulos vivos a partir del 6.º año,
3. Títulos amortizados en el 5.º sorteo,
4. Títulos amortizados después de 7 sorteos,
5. Cuantía dedicada al pago de cupones en el 7.º sorteo.

Solución: 1) $a = 13\,586\,795,82$ 2) $N_6 = 47\,080$ 3) $M_5 = 9\,578$
4) $m_7 = 63\,682$ 5) $I_7 = 2\,824\,800$

Ejercicio 8.6 En un empréstito de 10 000 títulos, de 500 € nominales, amortizables mediante anualidades constantes en 5 años, con abono de cupón anual vencido de 40 € por obligación, se pide construir el cuadro de amortización por los métodos:

1. De capitalización de los residuos,
2. De redondeo de las amortizaciones teóricas.

Ejercicio 8.7 Del cuadro de amortización de un empréstito normal hemos tomado los siguientes datos: intereses del primer año 300 000 €; intereses del segundo año 263 154 €; siendo el número de teórico de títulos amortizados el último año 987,54185, el nominal de las obligaciones 1 000 €, se pide:

1. Tanto de valoración del empréstito,
2. Anualidad del mismo,
3. Número de títulos emitidos,
4. Duración del empréstito.

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 8.1 Entendemos que la opción de compra coincide con un término amortizativo,

$$i^{(12)} = \frac{0,05}{12} = 0,004167$$

$$a = \frac{C_0}{\ddot{a}_{\overline{n+1}|i}} \qquad a = \frac{20\,000}{\ddot{a}_{\overline{37}|0,004167}} \qquad a = 581,98$$

$$\begin{array}{ll}
I_1 = (C_0 - O_c)\, i & I_1 = (20\,000 - 581,98)\, 0,004167 = 80,91 \\
A_1 = a - I_1 & A_1 = 581,98 - 80,91 = 501,07 \\
C_1 = a\, \ddot{a}_{\overline{37-1}|0,004167} & C_1 = 581,98 \cdot 33,504535 = 19\,498,93 \\
I_2 = (C_1 - O_c)\, i & I_2 = (19\,498,93 - 581,98)\, 0,004167 = 78,82 \\
A_2 = a - I_2 & A_2 = 581,98 - 78,82 = 503,16 \\
A_2 = A_1\,(1+i) & A_2 = 501,07\,(1 + 0,004167) = 503,16 \\
C_2 = a\, \ddot{a}_{\overline{37-2}|0,004167} & C_2 = 581,98 \cdot 32,640161 = 18\,995,92 \\
C_2 = C_1 - A_2 & C_2 = 19\,499,08 - 503,16 = 18\,995,92
\end{array}$$

Al importe de cada término a habría que añadirle el IVA vigente.

n	a	I_s	A_s	M_s	C_s
0					20 000,00
1	581,98	80,91	501,07	501,07	19 498,93
2	581,98	78,82	503,16	1 004,22	18 995,92

Solución ejercicio 8.2 Obtenemos en primer lugar el tipo de interés efectivo trimestral,

$$i^{(4)} = (1 + 0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,014674$$

$$a = \frac{40\,000}{\ddot{a}_{\overline{12+1}|0,014674}} \qquad a = 3\,352,98$$

$$I_{10} = (C_9 - O_c)\, i \qquad C_9 = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$

$$C_9 = 3\,352,98\, \ddot{a}_{\overline{4}|0,014674} \qquad C_9 = 13\,123,78$$

$$I_{10} = (13\,123,78 - 3\,352,98)\, 0,014674 \qquad I_{10} = 143,38$$

Solución ejercicio 8.3

1. Calculamos en primer lugar el tipo de interés efectivo aplicable i_{12} para poder obtener la mensualidad,

$$i^{(12)} = (1 + 0,06)^{\frac{1}{12}} - 1 \qquad i^{(12)} = 0,004868$$

$$a = \frac{120\,000}{\ddot{a}_{\overline{121}|0,004868}} \qquad a = 1\,308,27$$

$$C_{12} = a\, \ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i} \qquad C_{12} = 1\,308,27\, \ddot{a}_{\overline{121-12}|0,004868}$$

$$C_{12} = 1\,308,27 \cdot 84,841251 \qquad C_{12} = 110\,995,26$$

2.

$$\begin{array}{rcl}
1\,308,27 \cdot 12 & = & 15\,699,24 \\
 & - & 9\,004,74 \\
 & = & 6\,694,32
\end{array}$$

3. El capital al inicio del 6.º año es el capital pendiente al final del 5.º año que son 60 mensulidades,

$$C_{60} = 1\,308,27\, \ddot{a}_{\overline{121-60}|0,004868} \qquad C_{60} = 69\,238,65$$

Solución ejercicio 8.4

$$i^{(12)} = \frac{0,05}{12} \qquad i^{(12)} = 0,004167$$

$$24\,000 = a\,\ddot{a}_{\overline{61}|0,004167} \qquad a = \frac{24\,000}{\ddot{a}_{\overline{61}|0,004167}} \qquad a = 444,52$$

1.
$$M_{24} = C_0 - C_{24} \qquad C_{24} = a\,\ddot{a}_{\overline{n+1-s}|i}$$
$$C_{24} = 444,52\,\ddot{a}_{\overline{61-24}|0,004167} \qquad C_{24} = 15\,276,24$$
$$M_{24} = 24\,000 - 15\,276,24 = 8\,723,76$$

2.
$$444,52 \cdot 61 - 24\,000 = 3\,115,78$$

3. Obtenemos en primer lugar el capital pendiente,

$$C_{13} = 444,52\,\ddot{a}_{\overline{61-13}|0,004167} \qquad C_{13} = 19\,382,79$$

$$a' = \frac{19\,382,79}{\ddot{a}_{\overline{48}|0,004583}} \qquad a' = 448,72$$