4

Capitalización y descuento compuesto

4.1. Capitalización compuesta

Se denomina así, a la operación financiera según la cual los intereses producidos por un capital en cada periodo se agregan al capital para calcular los intereses del periodo siguiente y así sucesivamente hasta el momento de cierre de la operación financiera.

La *capitalización compuesta* o interés compuesto, es una operación financiera generalmente a largo plazo (con una duración superior al año) en la que los intereses se acumulan al capital al final de cada periodo.

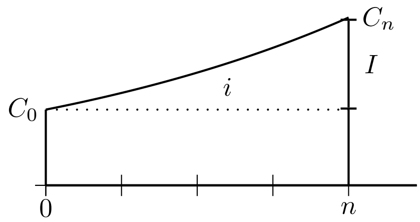

Figura 4.1: *Capitalización compuesta*

Las variables a considerar, son:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \text{valor actual o capital inicial,}\\
I &= \text{intereses,}\\
C_n &= \text{valor final o montante de la operación,}\\
i &= \text{tasa de interés,}\\
n &= \text{número de períodos.}
\end{aligned}
$$

En cualquier caso, n e i, han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

En la capitalización compuesta, el deudor, al vencimiento ha de pagar el capital más los intereses. El valor final C_n en capitalización compuesta, transcurridos n períodos y al tanto i, lo podemos determinar para un capital C_0, como

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C_0 + C_0\, i = C_0\,(1+i)\\
&C_2 = C_1 + C_1\, i = C_0\,(1+i)\,(1+i) = C_0\,(1+i)^2\\
&C_3 = C_2 + C_2\, i = C_0\,(1+i)^2\,(1+i) = C_0\,(1+i)^3\\
&\ \vdots\\
&C_n = C_{n-1} + C_{n-1}\, i = C_0\,(1+i)^{n-1}\,(1+i) = C_0\,(1+i)^n
\end{aligned}
$$

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \tag{4.1}$$

expresión que relaciona el montante o capital final, transcurridos n períodos de capitalización, con el capital inicial prestado. ∎

A la expresión $(1+i)^n$ la denominaremos *factor de capitalización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor actual nos permite obtener el valor final o montante equivalente.

Independientemente de la ley financiera utilizada, los intereses generados, serán la diferencia entre el capital final e inicial, y por tanto:

$$C_n = C_0 + I \qquad I = C_n - C_0 \qquad I = C_0\,(1+i)^n - C_0$$

$$I = C_0\big[(1+i)^n - 1\big] \tag{4.2}$$

La capitalización compuesta consiste en un proceso de acumulación de los intereses al capital para producir conjuntamente nuevos intereses, periodo tras periodo, hasta llegar al final de la operación financiera. Gráficamente, la acumulación de intereses, se vería tal como se muestra en la figura 4.2.

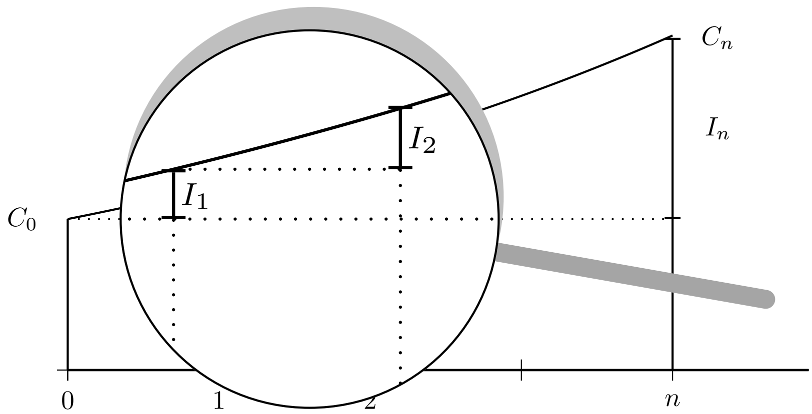

Figura 4.2: *Acumulación de intereses en la capitalización compuesta*

Ejemplo 4.1 Determinar el montante de un capital de 1 000 €, invertido al 6 % de interés compuesto anual durante 10 años.

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad\qquad C_n = 1\,000\,(1+0,06)^{10} = 1\,790,85$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener C_n,

1000 CHS [1] PV 10 n 6 i FV obteniendo la respuesta de 1 790,85

4.1.1. Magnitudes derivadas

Si despejamos C_0 en (4.1), resulta:

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad \text{o} \qquad C_0 = C_n(1+i)^{-n} \tag{4.3}$$

La expresión $(1+i)^{-n}$ recibe el nombre de *factor de actualización compuesta*, ya que al aplicarla sobre el valor final obtenemos el capital inicial o valor actual.

Para calcular n, tomando logaritmos y partiendo de $C_n = C_0\,(1+i)^n$,

$$\log C_n = \log C_0 + n\log(1+i)$$

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \tag{4.4}$$

Partiendo de la propia ley (4.1), despejaremos i,

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad\qquad \frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n \qquad\qquad \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} = (1+i)$$

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \tag{4.5}$$

[1] Debe recordarse al introducir los importes en la HP12c la convención de signos: dinero recibido, positivo, dinero entregado o pagado, negativo.

Ejemplo 4.2 Determinar el capital a invertir en capitalización compuesta al 5 % de interés para que en 4 años se convierta en 6 000 €.

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} \qquad C_0 = \frac{6\,000}{(1+0,05)^4} = 4\,936,21$$

Con la calculadora financiera, para obtener C_0,

5 [i] 4 [n] 6000 [FV] [PV] obteniendo como respuesta -4 936,21

Ejemplo 4.3 Determinar el tipo de interés i al que deben invertirse 1 000 € para obtener en 8 años un montante de 1 368,57 €.

$$i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \qquad i = \left(\frac{1\,368,57}{1\,000}\right)^{\frac{1}{8}} - 1 = 0,04 = 4\,\%$$

Con la calculadora financiera, para obtener i,

1000 [CHS] [PV] 8 [n] 1368,57 [FV] [i] obteniendo el valor 4

Ejemplo 4.4 Determinar el tiempo necesario para que un capital de 2 000 € colocado a interés compuesto del 5 % anual, se convierta en 5 306,60 €.

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)} \qquad n = \frac{\log 5\,306,60 - \log 2\,000}{\log(1+0,05)} = 20 \text{ años}$$

Utilizando la calculadora financiera, para obtener n,

2000 [CHS] [PV] 5 [i] 5306,6 [FV] [n] obteniendo el resultado de 20[2]

4.2. Comparación entre capitalización simple y compuesta

Los montantes obtenidos en la capitalización simple y compuesta, son:

$C_n = C_0\,(1 + i\,n)$ Capitalización simple (L_1),
$C_n = C_0\,(1 + i)^n$ Capitalización compuesta (L_2).

Ambas expresiones se diferencian entre sí por los factores de capitalización: $(1+i)^n$ en la capitalización compuesta y $(1 + i\,n)$ en la capitalización simple.

Si representamos gráficamente las funciones, obtendríamos la figura 4.3.

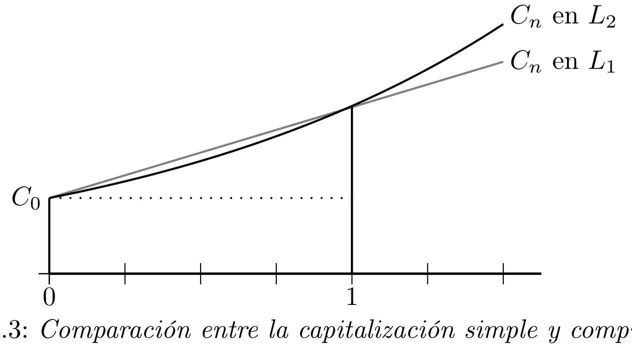

Figura 4.3: *Comparación entre la capitalización simple y compuesta*

[2] En la HP12c el resultado obtenido siempre es un número entero. Otras calculadoras u hojas de cálculo darán la solución matemática exacta incluyendo decimales, sin embargo, en la solución al tiempo, la parte fraccionaria supone un pago adicional de menor cuantía y no una fracción del mismo.

De la comparación podemos decir que el montante de capitalización es *mayor* en la capitalización simple para periodos inferiores al año, *igual* para un año y *menor* para los periodos superiores al año.

Podemos concluir diciendo que la capitalización simple puede considerarse como una simplificación práctica de la compuesta, cuando el número de períodos varía entre 0 y 1, es decir, cuando se opera a corto plazo.

4.3. Equivalencia de tantos en capitalización compuesta

En la capitalización compuesta no existe proporcionalidad entre los tantos de interés referidos a distintos períodos de tiempo, al contrario que en la simple.

En la capitalización simple, el capital final que se obtiene al cabo de n años al tipo de interés i, es el mismo que el obtenido al cabo de $n\,m$ períodos al tipo de interés $i^{(m)}$, siendo $i^{(m)}$ la m-ésima parte de i, y m el número de subperíodos en los que dividimos al año.

Es decir, se cumplirá:

$$\left.\begin{array}{l} C_n \;\;= C_0\,(1+i\,n) \\ C_{n\,m} = C_0\left(1+i^{(m)}\,n\,m\right) \end{array}\right\} \text{ siendo } i^{(m)} = \frac{i}{m}, \text{ tendremos que } C_n = C_{n\,m}$$

En la capitalización compuesta, no existe esta proporcionalidad, ya que:

$$\left.\begin{array}{l} C_n \;\;= C_0\,(1+i)^n \\ C_{n\,m} = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \end{array}\right\} \text{ siendo } i^{(m)} = \frac{i}{m}, \text{ se cumplirá que } C_n \neq C_{n\,m}$$

Por tanto, en capitalización compuesta es importante conocer la frecuencia de capitalización, que designaremos por m, cuando ésta es inferior al año y que ya definimos (véase 2.1 en la página 9) como el número de veces que los intereses se incorporan al capital dentro del año.

Tendremos que determinar, en el régimen de capitalización compuesta de tanto efectivo anual i, el tanto de frecuencia $i^{(m)}$ que debe regir para otra capitalización compuesta de periodo m-ésimo, de forma que ambas capitalizaciones sean equivalentes.

El montante al cabo de n años en capitalización compuesta al tanto efectivo i, es:

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

En capitalización compuesta al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, el montante al cabo de n años, es decir $n\,m$, m-ésimos de año es,

$$C_n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

La equivalencia implica la igualdad de montantes, por lo que,

$$C_0\,(1+i)^n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} \qquad\qquad (1+i)^n = \left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m}$$

extrayendo la raíz n en ambos miembros,

$$\left(1+i^{(m)}\right)^m = 1+i \tag{4.6}$$

ecuación de los tantos equivalentes o *equivalencia de tantos.* ∎

Podemos concluir que dos tantos son equivalentes cuando aplicado el proceso de capitalización compuesta al mismo capital inicial y durante el mismo tiempo producen capitales finales iguales.

Si en (4.6), extraemos la raíz m-ésima, tendremos:

$$1 + i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \text{ de donde } i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1$$

expresión que nos permite conocer el tanto de frecuencia en función del *tanto efectivo anual.* Análogamente,

$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m - 1$$

La TAE (Tasa Anual Equivalente o Efectiva), regulada para las Entidades de Crédito en la Circular 5/2012 de 27 de junio, intenta ser una *unidad homogénea de medida.* Esta tasa incluye el efecto de determinados gastos, como las comisiones que afectan el coste o rendimiento final de la operación. Esta forma de cálculo indica expresamente las partidas que deben incluirse tanto en la prestación como en la contraprestación, dejando fuera muchas veces cantidades que suponen un incremento en el coste efectivo para el sujeto pasivo. Si no existen gastos en una operación financiera, la TAE coincidirá con el interés efectivo anual i.

Por otra parte, se define el *tanto nominal* $J^{(m)}$, como un tanto teórico que se obtiene multiplicando la frecuencia de capitalización m por el tanto de frecuencia o equivalente.

$$J^{(m)} = m\, i^{(m)} \tag{4.7}$$

Este recibe también el nombre de TIN (Tipo de Interés Nominal anual). En la figura 4.4 puede verse la representación gráfica. ∎

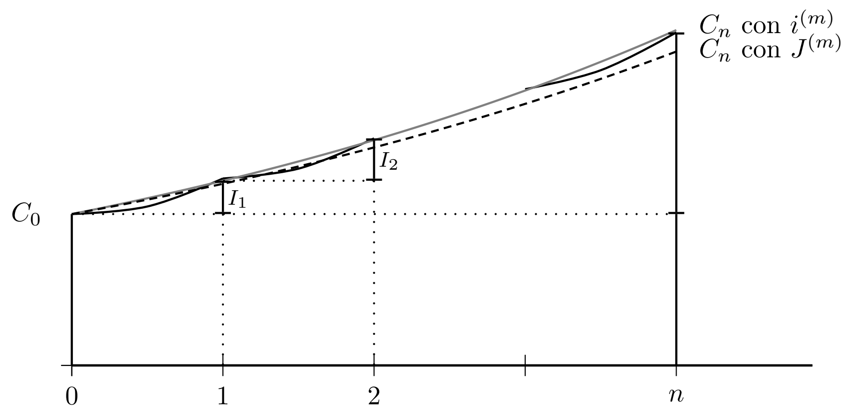

Figura 4.4: *Equivalencia de tantos*

Ejemplo 4.5 Determinar el montante de un capital de 7 500 € invertido al 6 % anual capitalizable por trimestres durante 10 años.

Utilizando el tanto de frecuencia equivalente,

$$i^{(4)} = \frac{J^{(4)}}{4} = \frac{0,06}{4} = 0,015$$

$$C_{n\,m} = C_0 \left(1 + i^{(m)}\right)^{n\,m} = 7\,500\,(1 + 0,015)^{10\cdot 4} = 13\,605,14$$

Calculando previamente el tanto efectivo anual,

$$i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m - 1 = (1 + 0,015)^4 - 1 = 0,06136$$

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n = 7\,500\,(1 + 0,06136)^{10} = 13\,605,14$$

Utilizando la calculadora para convertir el tipo de interés, q

6 [ENTER] 4 [n] [÷] [i] 100 [CHS] [ENTER] [PV] [FV] [+] obteniendo 6,1364

Para obtener C_n con la calculadora desde el punto anterior,

10 [n] 7500 [CHS] [PV] [FV] con el resultado de 13 605,14

Si queremos obtener el interés nominal a partir del efectivo,

4 [n] 100 [ENTER] [PV] 6,1364 [+] [CHS] [PV] [i] [RCL] [n] [×] obteniendo 6

4.4. Capitalización compuesta en tiempo fraccionario

La capitalización compuesta fue establecida para valores de n expresados en un número entero de años.

Si suponemos que dado el tanto anual i, el tiempo z, no es entero, sino fraccionario, se podrá expresar de la forma,

$$z = n + \theta$$

en la que n es un número entero y θ decimal. Para la obtención del montante, puede utilizarse uno de los convenios siguientes:

4.4.1. Convenio exponencial

Consiste en tomar como valor del montante al cabo del tiempo n, cualquiera que sea éste, la expresión exponencial:

$$C_n = C_0\,(1 + i)^{n+\theta}$$

4.4.2. Convenio lineal

Consiste en capitalizar a interés compuesto por el número entero de años que contenga el tiempo y a interés simple por la fracción de año restante.

El montante, según este convenio, será:

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n (1 + \theta\, i)$$

estando lógicamente θ e i referidos a la misma unidad de tiempo.

Ejemplo 4.6 Calcular el montante de un capital de 10 000€ al 4 % anual en 10 años y 3 meses.

Aplicando el convenio exponencial,

$$C_n = C_0\,(1+i)^{n+\theta} = 10\,000\,(1+0,04)^{10+\frac{3}{12}} = 14\,948,30$$

Con el convenio lineal,

$$C_n = C_0\,(1+i)^n(1+\theta\,i) = 10\,000\,(1+0,04)^{10}\left(1+\frac{3}{12}\,0,04\right) = 14\,950,47$$

Utilizando la calculadora financiera podremos determinar los valores según ambos convenios que se conmutan con STO EEX apareciendo el indicador C en la pantalla para el convenio lineal.

10 ENTER 3 ENTER 12 ÷ + n 4 i 10 000 CHS PV FV 14 948,30

STO EEX FV FV 14 950,47 para el convenio lineal

4.5. Capitalización continua

La capitalización continua, constituye un caso particular de la capitalización compuesta. Cuando el número de fraccionamientos m tiende a infinito, los intereses se capitalizan instantáneamente y nos encontramos ante la capitalización continua.

Hemos visto que el montante, en capitalización compuesta, al tanto de frecuencia $i^{(m)}$, en n años, venía dado por:

$$C_n = C_0\left(1+i^{(m)}\right)^{n\,m} = C_0\left(1+\frac{J^{(m)}}{m}\right)^{n\,m}$$

Si $m \to \infty$, $J^{(m)} = J^{(\infty)} = \delta$, este último será el tanto nominal anual en el caso de capitalización continua, y el montante vendrá dado por:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^{n\,m} \tag{4.8}$$

Si e, base de los logaritmos neperianos, es:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2,7182818\ldots$$

y transformando (4.8) con $m = x\,\delta$,

$$C_n = \lim_{x\to\infty} C_0\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n\,x\,\delta} = C_0\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{n\,\delta} = C_0\,e^{n\,\delta}$$

por lo que el montante en el caso de la capitalización continua, viene dado por la expresión

$$C_n = C_0\,e^{n\,\delta} \tag{4.9}$$

en la que δ, tanto nominal en capitalización continua, recibe también el nombre de *fuerza de interés*. ■

Para obtener la equivalencia entre la fuerza de interés y la tasa efectiva, igualamos $C_0\,e^{n\,\delta} = C_0\,(1+i)^n$. En consecuencia, $e^{J^{(m)}} = (1+i)$, y por tanto,

$$i = e^{J^{(m)}} - 1$$

lo que nos permite obtener la tasa efectiva i y aplicar la expresión de la capitalización compuesta (4.1) de la página 44.

Ejemplo 4.7 Determinar el montante obtenido con una inversión de 1 000 € que en capitalización continua se impone al 6 % durante 4 años.

$$C_n = C_0\, e^{n\,\delta} \qquad C_n = 1\,000\, e^{4\cdot 0{,}06} = 1\,271{,}25$$

Con la calculadora financiera, podríamos obtener previamente i,

1 $\boxed{\text{ENTER}}$ 6 $\boxed{\%}$ $\boxed{\text{g}}$ $\boxed{e^x}$ $\boxed{\triangle\%}$ con el resultado de 6,1837

procediendo con este valor de i de forma convencional con la expresión (4.1).

4.6. Descuento compuesto

Se denomina así la operación financiera que tiene por objeto la sustitución de un capital futuro por otro con vencimiento presente, mediante la aplicación de una ley financiera de descuento compuesto. Es una operación inversa a la de capitalización compuesta.

Los elementos a tener en cuenta son:

D = descuento o rebaja que sufre una cantidad pagada antes de su vencimiento,
C_n = nominal o cantidad que se debe pagar al vencimiento,
C_0 = efectivo o cantidad realmente pagada.

Por definición el descuento experimentado por el nominal C_n, como consecuencia de anticipación desde su vencimiento en el momento n, al momento presente 0, será:

$$D = C_n - C_0$$

4.6.1. Descuento racional compuesto

Se define como el interés del efectivo, durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento racional compuesto lo designaremos por D_{rc} y se calcula sobre el valor del efectivo.

De la capitalización compuesta (4.1),

$$C_n = C_0\,(1+i)^n$$

obtenemos el valor actual,

$$C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n} = C_n(1+i)^{-n}$$

por lo que el descuento racional compuesto, será:

$$D_{rc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1+i)^{-n} = C_n\big[1-(1+i)^{-n}\big]$$

$$D_{rc} = C_n\big[1-(1+i)^{-n}\big] \tag{4.10}$$

4.6.2. Descuento comercial compuesto

Se define como el interés del nominal durante el tiempo que falta para su vencimiento. Al descuento comercial compuesto, lo designamos por D_{cc} y se calcula sobre el valor nominal.

$$
\begin{aligned}
C_{n-1} &= C_n - d\,C_n = C_n(1-d)\\
C_{n-2} &= C_{n-1} - d\,C_{n-1} = C_{n-1}(1-d) = C_n(1-d)\,(1-d) = C_n(1-d)^2\\
C_{n-3} &= C_{n-2} - d\,C_{n-2} = C_{n-2}(1-d) = C_n(1-d)^2\,(1-d) = C_n(1-d)^3\\
&\vdots\\
C_0 &= C_1 - d\,C_1 = C_1(1-d) = C_n(1-d)^{n-1}(1-d) = C_n(1-d)^n
\end{aligned}
$$

$$C_0 = C_n(1-d)^n \tag{4.11}$$

Y el valor del descuento comercial compuesto, será:

$$D_{cc} = C_n - C_0 = C_n - C_n(1-d)^n = C_n\big[1-(1-d)^n\big]$$

$$D_{cc} = C_n\big[1-(1-d)^n\big] \tag{4.12}$$

4.6.3. Tanto de interés equivalente a uno de descuento

Igual que veíamos en la capitalización simple, podemos encontrar un tanto de descuento equivalente a uno de interés. Para ello, igualamos $D_{rc} = D_{cc}$,

$$C_n\big[1-(1+i)^{-n}\big] = C_n\big[1-(1-d)^n\big]$$

$$(1+i)^{-n} = (1-d)^n \qquad (1+i)^{-1} = 1-d \qquad 1-d = \frac{1}{1+i}$$

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad i = \frac{d}{1-d} \tag{4.13}$$

Ejemplo 4.8 Tenemos que pagar una deuda de 24 000 € dentro de 3 años. Si se adelanta su pago al momento presente, qué descuento nos harán si se realiza a una tasa de descuento compuesto del 5 %

Con el descuento racional,

$$D_{rc} = C_n\big[1-(1+i)^{-n}\big] \qquad D_{rc} = 24\,000\,\big[1-(1{,}05)^{-3}\big] = 3\,267{,}90$$

Con el descuento comercial,

$$D_{cc} = C_n\big[1-(1-d)^n\big] \qquad D_{cc} = 24\,000\,\big[1-(1-0{,}05)^3\big] = 3\,423$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 Una persona impone 100 000 € durante 6 años al 5 % de interés compuesto. Al cabo de 3 años, se eleva el tipo de interés en las imposiciones a plazo fijo, al 6 %. Se desea saber al término de los 6 años, cuál ha sido el capital retirado y cuál hubiera sido de no haberse producido la modificación indicada.

Solución: a) = 137 874, 99 b) = 134 009, 56

Ejercicio 4.2 Sabiendo que un capital de cuantía C se ha impuesto en un banco que capitaliza semestralmente, al cabo de 20 años se ha constituido en $3C$, obtener razonadamente las expresiones de:

1. El tanto efectivo anual,
2. El tanto nominal anual,
3. El tanto efectivo semestral.

Solución: 1) $i = 5,65\,\%$ 2) $J = 5,57\,\%$ 3) $i^{(2)} = 2,78\,\%$

Ejercicio 4.3 Calcular:

1. El tanto efectivo anual correspondiente al 6 % nominal cuando se capitaliza por meses.
2. El nominal anual correspondiente al 6 % efectivo cuando se capitaliza por trimestres.

Solución: 1) $i = 6,17\,\%$ 2) $J^{(4)} = 5,87\,\%$

Ejercicio 4.4 Imponemos durante 2 años y 8 meses 10 000 €, por las que nos pagan el 10 % de interés compuesto anual ¿Qué cantidad nos dará el banco al finalizar el período?

1. Al aplicar el convenio lineal,
2. Con el convenio exponencial.

Solución: 1) $C_n = 12\,906,67$ 2) $C_n = 12\,893,79$

Ejercicio 4.5 Una deuda de 10 000 € debe ser devuelta al cabo de 39 meses. Si el tanto de capitalización es del 5 % anual, determinar el importe a devolver

1. Al aplicar el convenio lineal,
2. Con el convenio exponencial.

Solución: 1) $C_n = 11\,720,95$ 2) $C_n = 11\,718,32$

Ejercicio 4.6 ¿Cuánto tiempo es preciso colocar un capital de 35 000 € al 5 % para conseguir en régimen de capitalización compuesta un montante de 45 000 €?

Solución: $n = 5$ años 1 mes 24 días

Ejercicio 4.7 Pactamos con un acreedor que abonándole hoy 50 000 € a cuenta de 200 000 € que habíamos de pagarle dentro de 2 años, podremos hacerle efectivas 160 000 € dentro de 4 años. ¿A qué tipo de interés compuesto se evaluó la operación?

Solución: $i = 5,146\,\%$

Ejercicio 4.8 Si el tanto a que se ha colocado un capital a interés compuesto durante 15 años hubiera sido el triple del que fue, se habría obtenido un capital del triple del que se obtuvo. Hallar el tanto.

Solución: $i = 3,950\,\%$

Ejercicio 4.9 ¿En qué tiempo el monto de 25 000 € serán 35 000 € al 6 % convertible trimestralmente?

Solución: $n = 5$ años 7 meses 23 días

Ejercicio 4.10 ¿Qué capital colocado al 5 % durante 10 años a interés compuesto se convierte en 97 734 €? ¿Cuánto valdrá este capital al final del año tercero?

Solución: $C_0 = 60\,000,20$ $\quad C_n = 69\,457,73$

Ejercicio 4.11 Un capital ha sido invertido al 12,36 % efectivo anual compuesto en capitalización semestral durante 20 años. El interés producido en el último semestre fue de 291 105,3. ¿Cuál fue el capital invertido y cuál el montante obtenido?

Solución: $C_0 = 500\,000$ $\quad C_n = 5\,142\,860,30$

Ejercicio 4.12 Un capital de 50 000 € ha sido colocado en régimen de capitalización compuesta alcanzando un montante de 150 000 €. Otro capital colocado al mismo tanto y régimen ha alcanzado el mismo montante en la mitad de tiempo. ¿Cuál es la cuantía de dicho capital?

Solución: $C_0 = 86\,602,54$

Ejercicio 4.13 Se asocian tres inversores e imponen un capital de 500 000 € en la explotación de un negocio. Al cabo de seis años lo liquidan y por capital e intereses, se reparten: 329 245,89 € el socio A, 548 743,32 € el socio B y 219 497,26 € el socio tercero C. Determinar la imposición de cada uno de los socios y el tanto de interés de la inversión.

Solución: $C_A^0 = 150\,000$ $\quad C_B^0 = 250\,000$ $\quad C_C^0 = 100\,000$ $\quad i = 14\,\%$

Ejercicio 4.14 Un inversor tiene la opción de colocar dos capitales de cuantías C_1 y C_2 a los tipos de interés anuales acumulativos del 8 % y 9 %. Si coloca C_1 al 8 % y C_2 al 9 % retiraría al cabo de 6 años 895 337,30 € y si coloca C_1 al 9 % y C_2 al 8 % obtendría 899 848,60 €. ¿Qué cuantías son C_1 y C_2?

Solución: $C_1^0 = 300\,000$ $\quad C_2^0 = 250\,000$

Ejercicio 4.15 Se han prestado 150 000 € para que sean devueltos después de 6 años al 20 % de interés bienal (cada dos años) acumulativo.

1. ¿Qué cantidad se tendrá que devolver?
2. ¿Y si se acuerda prorrogar durante un año más la devolución de la deuda capitalizando dicho año al tanto de interés anual equivalente al bienal dado?

Solución: 1) $C_n = 259\,200$ $\quad$ 2) $C_n = 283\,939,37$

Ejercicio 4.16 Conocido el tanto de interés efectivo semestral del 5 %, determinar el efectivo anual, el nominal convertible de frecuencia 2 y el efectivo trimestral.

Solución: $i = 10,25\,\%$ $\quad J_{(2)} = 10\,\%$ $\quad i_{(4)} = 2,47\,\%$

Ejercicio 4.17 Una deuda de 22 500 € debe ser devuelta al cabo de 27 meses. Si el tanto efectivo anual de capitalización es el 9 % determinar el importe a devolver.

Solución: $C_n = 27\,314,43$

Ejercicio 4.18 Si se desea cancelar una deuda de 125 000 € dentro de tres años, calcular el capital a entregar en los supuestos:

1. Tanto de interés del 6 % semestral,
2. Tanto de descuento del 10 % anual efectivo,
3. Tanto de descuento del 10 % anual con frecuencia 2

Solución: 1) $C_n = 177\,314,89$ 2) $C_n = 171\,467,76$ 3) $C_n = 170\,046,77$

Ejercicio 4.19 500 000 € colocados al 10 % de interés compuesto se convierten en n años en 885 780,50 €. ¿A qué tanto de interés simple tendrían que invertirse para que en el mismo tiempo generasen el mismo montante? ¿Cuánto tiempo tendrían que imponerse para el tanto del 10 % en interés simple?

Solución: $i = 12,86\,\%$ $n = 6$ años 8 meses 17 días

Ejercicio 4.20 Una entidad lanza un depósito a un año con un interés nominal del 12 % el primer mes y un 3,70 % el resto. Determinar el tanto efectivo de la operación.

Solución: $i = 4,479\,\%$

Ejercicio 4.21 ¿Qué tasa nominal capitalizable mensualmente obtuvo un montante de 26 500 € en 6 años con una aportación de 20 000 €?

Solución: $J_{(12)} = 4,699\,\%$

Ejercicio 4.22 Calcular el importe a devolver de un préstamo de 10 000 € a 3 años con sus intereses al 10 % anual anticipado.

Solución: $C_n = 13\,717,42$

Resolución de los ejercicios propuestos

Solución ejercicio 4.1

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

$$C_n = 100\,000\,(1+0,05)^3(1+0,06)^3 = 137\,874,99$$

Y si no se modifica el tipo de interés,

$$C_n = 100\,000\,(1+0,05)^6 = 134\,009,56$$

Solución ejercicio 4.2

$$C_n = C_0\,(1+i)^n \qquad 3\,C = C\left(1+i^{(2)}\right)^{20\cdot 2}$$

$$\left(\frac{3\,C}{C}\right)^{\frac{1}{40}} - 1 = i^{(2)} \qquad i^{(2)} = 0,027846$$

1. Si $i = (1+i)^{(m)} - 1$

$$i = (1+0,0278)^2 - 1 \qquad i = 0,056467$$

2. Si $J^{(m)} = m\,i^{(m)}$

$$J^{(2)} = 2 \cdot 0,0278 \qquad J^{(2)} = 0,055692$$

3. Es el valor que hemos obtenido directamente al resolver la ecuación inicial, por tanto $i^{(2)} = 0,027846$

Solución ejercicio 4.3

$$J^{(m)} = m\,i^{(m)} \qquad i = \left(1+i^{(m)}\right)^m - 1$$

1. Para el valor capitalizado mensual,

$$i^{(12)} = \frac{0,06}{12} = 0,0050 \qquad i = (1+0,0050)^{12} - 1 = 0,0617$$

2. Para el valor capitalizado trimestral,

$$i^{(4)} = (1+0,06)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,01467 \qquad J^{(4)} = 0,01467 \cdot 4 = 0,0587$$

Solución ejercicio 4.4

$$C_n = C_0\,\,(1+i)^n(1+\theta\,i) \qquad C_n = C_0(1+i)^{n+\theta}$$

1. Según el convenio lineal,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,1)^2\left(1+\frac{8}{12}0,1\right) = 12\,906,67$$

2. Con el convenio exponencial,

$$C_n = 10\,000\,(1+0,1)^{2+\frac{8}{12}} = 12\,893,79$$

Solución ejercicio 4.5

$$C_n = C_0\,\,(1+i)^n(1+\theta\,i) \qquad C_n = C_0(1+i)^{n+\theta}$$

1. Con el convenio lineal,

$$C_n = 10\,000\,(1 + 0,05)^3 \left(1 + \frac{3}{12}0,05\right) = 11\,720,95$$

2. Aplicando el convenio exponencial,

$$C_n = 10\,000\,(1 + 0,05)^{\frac{39}{12}} = 11\,718,32$$

Solución ejercicio 4.6

$$C_n = C_0\,(1 + i)^n$$

$$45\,000 = 35\,000\,(1 + 0,05)^n \qquad n = \frac{\log 45\,000 - \log 35\,000}{\log 1,05} = 5,1509$$

$$n = 5 \text{ años} \qquad 0,1509 \cdot 12 = 1 \text{ mes} \qquad 0,8111 \cdot 30 = 24 \text{ días}$$

Solución ejercicio 4.7 Igualamos todos los capitales con la ley de capitalización compuesta en el momento final. Sustituimos el factor de capitalización $(1 + i)^n$ por x y dividimos por 1 000 a fin de facilitar los cálculos,

$$200\,000\,(1 + i)^2 = 50\,000\,(1 + i)^4 + 160\,000 \qquad \text{sustituyendo, } x = (1 + i)^2$$

$$-50x^2 + 200x - 160 = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

$$x = \frac{200 \pm \sqrt{-200^2 - 4 \cdot 50 \cdot 160}}{2 \cdot 50} = 1,105573 \qquad (1 + i)^2 = 1,105573$$

$$i = \sqrt{1,105573} - 1 \qquad i = 0,051462 \approx 5,146\,\%$$

Solución ejercicio 4.8

$$\left.\begin{array}{r} C_n = C_0(1 + i)^{15} \\ 3\,C_n = C_0(1 + 3i)^{15} \end{array}\right\}$$

$$3\,C_0(1 + i)^{15} = C_0(1 + 3i)^{15} \qquad 3^{\frac{1}{15}}(1 + i) = (1 + 3\,i)$$

$$3^{\frac{1}{15}} + 3^{\frac{1}{15}}i = 1 + 3\,i \qquad 1,075990 + 1,075990\,i = 1 + 3\,i$$

$$0,075990 = 1,924010\,i \qquad i = \frac{0,076990}{1,924010} \qquad i = 0,039496 \approx 3,950\,\%$$

Solución ejercicio 4.9

$$C_n = C_0(1 + i)^n \qquad 35\,000 = 25\,000\left(1 + \frac{0,06}{4}\right)^n$$

$$n = \frac{\log 35\,000 - \log 25\,000}{\log 1,0150} = 22,5993$$

$$\frac{22,5993}{4} = 5,6498 = 5 \text{ años} \qquad 0,6498 \cdot 12 = 7 \text{ meses} \qquad 0,7979 \cdot 30 = 23 \text{ días}$$

La respuesta debe darse siempre en años, meses y días.

Solución ejercicio 4.10

$$C_n = C_0(1 + i)^n \qquad C_0 = \frac{97\,734}{(1 + 0,05)^{10}} \qquad C_0 = 60\,000$$

$$C_n = 60\,000\,(1 + 0,05)^3 \qquad C_n = 69\,457,73$$

Solución ejercicio 4.11 Teniendo en cuenta que los intereses son los que se han producido solo en el último semestre,

$$i^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \qquad i^{(2)} = (1+0,1236)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,06$$

$$I = C_{39}\, i \qquad 291\,105,3 = C_{39}\, 0,06 \qquad C_{39} = \frac{291\,105,3}{0,06} = 4\,851\,755$$

$$C_0 = \frac{C_{39}}{(1+i)^n} \qquad C_0 = \frac{4\,851\,755}{(1+0,06)^{39}} \qquad C_0 = 500\,000,13$$

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 500\,000,13(1+0,06)^{40} \qquad C_n = 5\,142\,860,30$$

Solución ejercicio 4.12

$$\left.\begin{array}{r} 150\,000 = 50\,000(1+i)^{2n} \\ 150\,000 = C(1+i)^n \end{array}\right\} \text{ Si, } x = (1+i)^n$$

$$\left.\begin{array}{r} 150\,000 = 50\,000x^2 \\ 150\,000 = Cx \end{array}\right\}$$

$$x^2 = \frac{150\,000}{50\,000} = 3 \qquad x = 1,732051$$

$$C = \frac{150\,000}{x} \qquad C = 86\,602,54$$

Solución ejercicio 4.13

$$\left.\begin{array}{r} 329\,245,89 = C_0^A(1+i)^6 \\ 548\,743,22 = C_0^B(1+i)^6 \\ 219\,497,26 = C_0^C(1+i)^6 \\ 500\,000 = C_0^A + C_0^B + C_0^C \end{array}\right\}$$

$$x = (1+i)^6 \qquad 500\,000 = \frac{329\,245,89}{x} + \frac{548\,743,32}{x} + \frac{219\,497,26}{x}$$

$$500\,000\, x = 329\,245,89 + 548\,743,32 + 219\,492,26$$

$$x = \frac{1\,097\,486,47}{500\,000} \qquad x = 2,194973$$

$$(1+i)^6 = 2,194973 \qquad i = 2,194973^{\frac{1}{6}} - 1 \qquad i = 0,14$$

$$C_0^A = \frac{329\,245,89}{(1+0,14)^6} \qquad C_0^A = 150\,000$$

$$C_0^B = \frac{548\,743,32}{(1+0,14)^6} \qquad C_0^B = 250\,000$$

$$C_0^C = 500\,000 - 150\,000 - 250\,000 \qquad C_0^C = 100\,000$$

Solución ejercicio 4.14

$$\left.\begin{array}{r} C_0^1(1+0,08)^6 + C_0^2(1+0,09)^6 = 895\,337,30 \\ C_0^1(1+0,09)^6 + C_0^2(1+0,08)^6 = 899\,848,60 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 1,586874C_0^1 + 1,677100C_0^2 = 895\,337,30 \\ 1,677100C_0^1 + 1,586874C_0^2 = 899\,848,60 \end{array}\right\}$$

$$C_0^1 = \frac{895\,337,30 - 1,677100C_0^2}{1,586874}$$

$$1,677100\left(\frac{895\,337,30 - 1,677100C_0^2}{1,586874}\right) + 1,586874C_0^2 = 899\,848,60$$

$$1\,501\,570,29 - 2,812664C_0^2 + 2,518170C_0^2 = 1\,427\,946,64$$

$$1\,501\,570,29 - 1\,427\,946,64 = 2,812664C_0^2 - 2,518170C_0^2$$

$$73\,623,65 = 0,294494C_0^2 \qquad C_0^2 = \frac{73\,623,65}{0,294494} \qquad C_0^2 = 250\,000$$

$$1,586874C_0^1 + 1,677100 \cdot 250\,000 = 895\,337,30$$

$$C_0^1 = \frac{895\,337,30 - 419\,275}{1,586874} \qquad C_0^1 = 300\,000$$

Solución ejercicio 4.15

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_n = 150\,000(1+0,20)^3 \qquad C - n = 259\,200$$

$$C_n = 150\,000(1+0,20)^{3,5} \qquad C_n = 283\,939,27$$

Solución ejercicio 4.16

$$(1+i) = \left(1+i^{(m)}\right)^m \qquad J^{(m)} = m\,i^{(m)}$$

$$i = (1+0,05)^2 - 1 \qquad i = 0,1025 \approx 10,25\,\%$$

$$J^{(2)} = 2 \cdot 0,05 \qquad J^{(2)} = 0,10 \approx 10$$

$$i^{(4)} = (1+0,1025)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,024695 \approx 2,47\,\%$$

Solución ejercicio 4.17

$$C_n = C_0(1+i)^n$$

$$C_n = 22\,500(1+0,09)^{\frac{27}{12}} \qquad C_n = 27\,314,43$$

Solución ejercicio 4.18

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad C_0 = C_n(1-d)^n$$

1. Con el interés semestral y el tiempo en semestres,

$$C_n = 125\,000(1+0,06)^{3\cdot 2} \qquad C_n = 177\,314,89$$

2. Utilizando el tanto efectivo de descuento,

$$125\,000 = C_n(1-0,10)^3 \qquad C_n = 171\,467,76$$

3.
$$125\,000 = C_n(1-0,05)^{3\cdot 2} \qquad C_n = 170\,046,77$$

Solución ejercicio 4.19

$$C_n = C_0(1+i)^n \qquad 885\,780,50 = 500\,000(1+i)^n$$

$$1,1^n = \frac{885\,780,50}{500\,000} = 1,771561$$

$$n \log 1,1 = \log 1,771561 \qquad n = \frac{\log 1,771561}{\log 1,1} \qquad n = 6 \text{ años}$$

1. El tipo i en capitalización simple,

$$500\,000(1+i\,6) = 885\,780,50 \qquad 500\,000 + 3\,000\,000\,i = 885\,780,50$$

$$i = \frac{335\,780,50}{3\,000\,000} = 0,128594$$

2. Para el cálculo del tiempo,

$$500\,000(1+0,10\,n)=885\,780,50 \qquad 500\,000+50\,000\,n=885\,780,50$$

$$n=\frac{335\,780,50}{50\,000} \qquad n=6,715610$$

$$n=6 \text{ años} \qquad 0,715610\cdot 12=8 \text{ meses} \qquad 0,587320\cdot 30=17 \text{ días}$$

Solución ejercicio 4.20

$$i=\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{1}\left(1+\frac{0,0370}{12}\right)^{11}-1 \qquad i=0,044789\approx 4,479\,\%$$

Solución ejercicio 4.21

$$C_n=C_0(1+i)^n \qquad 26\,500=20\,000\,(1+i)^6$$

$$i=\left(\frac{26\,500}{20\,000}\right)^{\frac{1}{6}}-1 \qquad i=0,048019$$

$$i^{(12)}=(1+i)^{\frac{1}{12}}-1 \qquad i^{(12)}=(1+0,048019)^{\frac{1}{12}}-1 \qquad i^{(12)}=0,003916$$

$$J^{(12)}=12\,i^{(12)} \qquad J^{(12)}=12\cdot 0,003916=0,046944\approx 4,699\,\%$$

Solución ejercicio 4.22

$$C_0=C_n\,(1-d)^n \qquad C_n=\frac{C_0}{(1-d)^n}$$

$$C_n=\frac{10\,000}{(1-0,1)^3} \qquad C_n=13\,717,42$$